Dew

ESSAI

SUR

LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE LA DIRECTION,

PAR

CASPAR WESSEL.

Traduction du mémoire intitulé: *Om Directionens analytiske Betegning*
[Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Femte Del. Kjøbenhavn 1799].

Publié avec les trois planches de l'original

et préfaces de MM. **H. VALENTINER** et **T.-N. THIELE**

par

L'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark

à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10 mars 1797.

COPENHAGUE.
COMMISSIONNAIRE PRINCIPAL: ANDR.-FRED. HÖST & SÖN, KGL. HOF-BOGHANDEL.
BIANCO LUNO (F. DREYER), IMPRIMEUR DE LA COUR.
1897.

ESSAI

SUR

LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DE LA DIRECTION,

PAR

CASPAR WESSEL.

Traduction du mémoire intitulé: *Om Directionens analytiske Betegning*

[Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Femte Del. Kjøbenhavn 1799].

Publié avec les trois planches de l'original

et préfaces de MM. **H. VALENTINER** et **T.-N. THIELE**

par

L'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark

à l'occasion du centenaire de sa présentation à l'Académie le 10 mars 1797.

COPENHAGUE.

BIANCO LUNO (F. DREYER), IMPRIMEUR DE LA COUR.

1897.

Première préface.

Par

H. Valentiner.

On a cru jusqu'ici que, dans son *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires,* Paris 1806, Argand était le véritable fondateur de la représentation moderne des nombres complexes comme lignes ayant une direction déterminée. Cependant il est démontré que, dès 1799, Gauss a eu la même idée, et déjà vers la fin du 17e siècle Wallis a essayé de donner aux nombres imaginaires une signification réelle (*A treatise of Algebra,* London 1685, chap. 66-69). Il est donc possible de reporter la première trace de la théorie en question à un temps beaucoup plus reculé que celui qu'on avait supposé jusqu'ici.

Toutefois le traité d'Argand est, de tous ceux qu'on avait bien remarqués jusqu'ici, celui qui représente le plus complètement la théorie des nombres imaginaires, et qui toujours pour cette raison conserve un intérêt historique; mais le présent mémoire est à la fois antérieur au traité d'Argand (on l'a présenté à l'Académie des Sciences de Copenhague le 10 mars 1797, et imprimé en 1798)*), et il contient une théorie tout aussi complète que celui d'Argand, sous une forme, à mon avis, plus exacte, de sorte qu'en le reproduisant on agit simplement en historien impartial. Il a aussi sur celui d'Argand l'avantage de renfermer une théorie des opérations algébriques faites avec des lignes dans l'espace, ce qui fait qu'à peu près 50 ans avant les théories d'Hamilton, il donne la première application des quaternions. La théorie de Wessel sur des

*) Il est intitulé: *Om Direktionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning. Af Caspar Wessel, Landmaaler,* et renfermé dans le vol. V de *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* (Mémoires de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark, 2e série). Ce volume a paru en 1799.

opérations algébriques faites avec des lignes dans l'espace est à la vérité moins détaillée que celle d'Hamilton, mais absolument correcte, aussi bien dans sa mise en œuvre que dans son application*).

Quant à son importance pour le développement de la science, ce mémoire a été placé d'une façon tout particulièrement malencontreuse, car il a passé pour ainsi dire complètement inaperçu. Le traité d'Argand a bien aussi, à son apparition, été également méconnu; mais, dès 1813, il a été remarqué et réimprimé dans les *Annales* de Gergonne, et c'est probablement ce qui lui a donné une certaine influence sur le développement des mathématiques. Le mémoire de Wessel, au contraire, n'a probablement pas eu un lecteur qui le comprît (à l'exception peut-être du conseiller d'État Tetens qui présenta ce mémoire) avant d'avoir été presque par hasard **) tiré de l'oubli, environ un siècle après son apparition.

Dans ce qui va suivre, je donnerai une courte exposition de la vie de l'auteur et du contenu principal de son mémoire.

Caspar (Gaspard) Wessel est né le 8 juin 1745 à Jonsrud en Norvège, où son père était pasteur. (Ce dernier mourut en 1785, doyen du district d'Œvre Borgesyssel.) Comme il y avait en tout treize enfants, Caspar fut probablement élevé dans des conditions très modestes; cependant il a joui d'une bonne instruction, car, en 1757, il entra au lycée de Christiania, d'où, en 1763, il partit pour Copenhague comme étudiant. Il n'y a pourtant pas continué ses études bien longtemps; car déjà en 1764, il a été engagé comme aide par l'Académie des Sciences pour prendre part à la triangulation et à la cartographie du Danemark. Il continua pendant presque toute sa vie à être arpenteur de cette Académie jusqu'en 1805, année où il reçut son congé.

Pendant tout le temps de son service, il était très apprécié comme arpenteur, ce que prouvent non seulement les diverses missions qu'on lui a confiées, mais encore les éloges accordés à ses ouvrages. Ainsi, c'est lui qui, le 5 février 1779, présente à l'Académie des Sciences une échelle et une division

---

*) Dans une seconde préface M. Thiele montre comment on peut la développer en une théorie complète de quaternion.

**) Il est mentionné dans une thèse de M. S.-A. Christensen, intitulée *Mathematikens Udvikling i Danmark og Norge i det 18. Aarhundrede,* Odense 1895, et ceci a donné lieu à des recherches plus approfondies faites par différents savants. (M. C. Juel a donné un résumé dans la *Nyt Tidsskr. f. Math.*, 6e ann., Copenhague 1895). M. Thiele croit que, une fois dans sa jeunesse, le professeur Chr. Jürgensen l'a renvoyé au mémoire de Wessel.

du pays relative à la cartographie, et qui, pendant les années 1782-85, sur la demande du duc d'Oldenbourg, dresse des cartes de ce duché. Après son congé du service de l'Académie, il dessina encore pour elle une copie des cartes du Slesvig et du Holstein, cartes que le gouvernement français avait demandées au royaume de Danemark. Comme il ne voulait pas accepter de rémunération pour ce travail, l'Académie lui donna sa médaille d'argent et un exemplaire des Mémoires et des cartes de l'Académie. Plus tard, en 1819, lorsqu'on commença de traiter de surannées les cartes de l'Académie, on excepta expressément les déterminations trigonométriques de Wessel.

Déjà assez avancé en âge, il passa, en 1778, l'examen de jurisprudence latine. En 1780, il épousa Catherine-Élisabeth Möller; en 1815, il fut nommé chevalier du Danebrog, ce qui était probablement alors une distinction rarement accordée à un arpenteur. Il mourut en 1818.

Il était frère du poète dano-norvégien Johan-Herman Wessel*), célèbre dans le Nord, et de l'auditeur général de la Norvège O.-Chr. Wessel, très considéré dans le temps et qui, lui aussi, avait commencé sa carrière comme arpenteur au service de l'Académie des Sciences.

Tandis que les contemporains de Caspar Wessel le citent toujours élogieusement comme arpenteur, on n'entend jamais parler de lui comme mathématicien, et à part ses propres observations dans son traité, on ignore ce qui a pu le porter à composer le seul mémoire de mathématiques qu'on possède de sa main. Cependant, comme son traité est le premier ouvrage de mathématiques qui, bien que n'ayant pas été écrit par un membre de l'Académie, a été admis parmi ses Mémoires, et comme celui qui a proposé cette admission est un savant aussi considéré pour son époque que l'était le conseiller d'État Tetens, qui lui-même a fourni aux Mémoires de l'Académie plusieurs travaux mathématiques, Wessel a dû être regardé comme un mathématicien de valeur. Il est étonnant qu'un homme puisse composer un ouvrage aussi remarquable que celui qui nous occupe, après avoir dépassé la cinquantaine, sans avoir jamais, ni avant ni après, produit aucune œuvre scientifique.

---

*) Ce poète a fait l'épigramme suivante sur son frère Caspar:

Han tegner Landkort og læser Loven,
han er saa flittig som jeg er doven.

Il dresse des cartes en étudiant la loi,
Aussi travailleur que je suis paresseux, moi.

Concernant l'admission du traité de Wessel parmi les Mémoires de l'Académie des Sciences, voici ce qu'on lit dans le procès-verbal de la séance du 10 mars 1797: «Monsieur le conseiller d'État Tetens a, comme président de la section des Sciences, donné à l'Académie le compte rendu d'un ouvrage envoyé à ladite Académie par l'opérateur trigonométrique Wessel concernant le *calculus situs,* lequel ouvrage a été jugé par l'Académie en tous points digne d'être admis dans ses Mémoires. A l'occasion de cet ouvrage, M. Tetens nous a lu quelques remarques sur la nature de ce calcul, remarques qui, en même temps que le traité de M. Wessel, vont être imprimées dans les Mémoires de l'Académie.» Cependant, ces remarques de Tetens ne se trouvent pas parmi les Mémoires de l'Académie. Il est seulement dit dans le traité que Wessel doit à ce savant des encouragements, des conseils et des indications détaillées, comme aussi on mentionne que l'écrit se présente maintenant moins imparfait et digne d'être admis dans le recueil des Mémoires de l'Académie.

Avant de parler en détail du contenu de ce mémoire, j'ajouterai encore à titre de curiosité que, dans un temps plus récent, il a subi un jugement très défavorable. Dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences,* publiée en 1843 par Molbech, le professeur Chr. Jürgensen donne, p. 237-241, un compte rendu des traités de mathématiques insérés aux Mémoires de l'Académie, jusqu'à l'année 1800. De ces traités on dit, sans doute avec raison, que leur importance scientifique n'est pas grande, parce qu'il n'y avait dans ce temps-là (fin du 18[e] siècle) que très peu de gens ayant atteint le point où la science en était arrivée alors. On parle d'une façon un peu plus détaillée du professeur Kraft et du lecteur Arentz. Sur les autres savants qui ont fourni des ouvrages de mathématiques (entre autre Wessel) on dit fort peu de chose; on se borne à citer les titres de leurs mémoires et à dire d'une façon générale d'eux tous: «Les traités des autres mathématiciens sont des monographies dont la valeur scientifique n'est pas considérable», ou bien «ils sont trop spéciaux pour être plus amplement mentionnés».

Nous allons maintenant examiner de plus près le contenu du mémoire de Wessel. Dès le début de l'introduction il est dit:

«Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les lignes droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique entre une seule ligne inconnue et d'autres lignes données, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction de l'inconnue.»

On voit donc par là que le fond du traité de Wessel est une théorie du calcul de lignes déterminées en grandeur et en direction de manière à exprimer l'une et l'autre par les symboles avec lesquels il calcule, et c'est là ce qui l'a conduit à représenter, par des nombres imaginaires, des lignes données en grandeur et en direction.

D'autre part, voici ce qu'il dit lui-même sur ce qui lui a donné l'occasion de ce développement:

«Ce qui m'a donné l'occasion de l'écrire, c'est que je cherchais une méthode qui permît d'éviter les opérations impossibles; l'ayant découverte je l'ai employée pour me convaincre de la généralité de certaines formules connues.»

On voit donc que ce sont ses efforts pour donner au traitement des nombres imaginaires une valeur réelle, qui l'ont amené à ce qu'il désigne lui-même comme étant le contenu principal de son mémoire.

D'ailleurs, toute son introduction dénote la clarté avec laquelle il a conçu sa tâche.

Il fait d'abord remarquer qu'en géométrie le calcul des nombres réels ordinaires, tant positifs que négatifs, répond seulement au calcul de segments de la même ligne ou de lignes du même sens ou de sens inverses. Veut-on faire le calcul avec des lignes de directions arbitraires, on aura à faire avec des quantités qui ont, non seulement les mêmes, mais encore infiniment plus de relations les unes avec les autres que n'en ont les nombres ordinaires. C'est pourquoi il faut étendre la signification des opérations algébriques en même temps qu'on respecte les règles ordinaires des opérations. «Par là on réussit, non seulement à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour chercher le possible, mais encore on parvient à exprimer la direction de toutes les lignes du même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur, sans que la mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles et de nouvelles règles. Or, il faut convenir que la démonstration générale des théorèmes géométriques devient souvent plus facile, lorsqu'on sait exprimer d'une manière analytique la direction et la soumettre aux règles des opérations algébriques, que lorsqu'on est réduit à la représenter par des figures qui ne sont applicables qu'à des cas particuliers. Il paraît donc être non seulement admissible, mais même avantageux de se servir d'opérations embrassant d'autres lignes que celles qui ont le même sens ou le sens opposé.»

Dans ces citations on a mis en évidence, autant que possible, quelques-uns des problèmes principaux du calcul des lignes déterminées en grandeur et en direction, et surtout comment le calcul avec des nombres imaginaires acquiert par là une importance réelle, et comment on peut généraliser par ce moyen les résultats géométriques de manière à s'exempter de l'étude des figures ou de l'analyse spéciale des cas différents. Il va sans dire que notre auteur n'a pas pu se figurer que ce calcul pût devenir d'une importance fondamentale pour l'analyse moderne (étude des fonctions).

En concordance avec son introduction, l'auteur ne commence donc pas par introduire les nombres imaginaires et des règles pour les employer dans le calcul, mais au contraire par introduire les lignes dirigées (segments) et les règles de ce qu'il veut entendre par leur addition et leur multiplication (§§ 2 et 4). Puis il démontre qu'en vertu de la définition, la perpendiculaire sur l'unité avec l'unité pour longueur, doit devenir $= \sqrt{-1}$, qu'il désigne par ε. Il montre (§ 2) que l'ordre des quantités à additionner est indifférent, et (§§ 7, 8, 9, 10) qu'on trouve le produit d'un polynôme en multipliant à part chaque terme et en additionnant les produits. Pour démontrer cette dernière proposition, il recourt aux propositions connues concernant les *sin.* et *cos.* de la somme de deux angles, propositions qu'il présuppose démontrées d'une manière générale.

Enfin il fait remarquer que ce développement sert de base à la théorie des équations, des fonctions entières et de leurs diviseurs premiers; cependant il ajoute que si l'on voulait multiplier des lignes dirigées situées dans l'espace, mais non dans un plan passant par l'unité positive, il faudrait mettre de côté la règle relative au produit des polynômes (§ 10, fin), après quoi il renvoie lui-même aux §§ 24-35 *).

Les §§ 11-15 exposent la division et l'extraction des racines, et, enfin, le § 16 fait allusion à la relation entre les fonctions trigonométriques et les exponentielles, bien qu'on n'en fasse pas usage plus tard. L'auteur promet de démontrer en une autre occasion les propositions qu'il énonce ici au § 16; mais il n'y est jamais arrivé.

Ayant comparé les développements de Wessel et d'Argand, je ne crois pas qu'on puisse nier que celui de Wessel soit le plus exact; car il y donne sa théorie de l'addition et de la multiplication sous forme de définition, tandis qu'Argand présente la sienne comme hypothèse**). On constate en

---

*) Voir à ce sujet l'observation de M. Thiele, p. XII.

**) Voir Argand, *Essai*, § 4, ainsi que, p. 60, la note par laquelle il termine en disant: «La méthode dont on vient d'exposer l'essai, repose sur deux principes de construction, outre que les propositions dont la démonstration expresse est, selon Wessel, réclamée par la logique, sont empruntées par Argand à la théorie des nombres réels, telle par exemple, la proposition importante concernant la multiplication des nombres à plusieurs termes, proposition dont Argand fait usage, lorsque de la théorie des nombres imaginaires il déduit la proposition relative aux *sin.* et *cos.* d'une somme, tandis que Wessel fait l'inverse, comme on l'a vu, et emploie la dernière proposition pour démontrer la première.

Si nous passons à l'application des théories, le travail d'Argand se montre très riche en exemples, dont pourtant la plupart sont des applications de la proposition d'après laquelle, si $a + bi = x + iy$ (a, b, x et y réels), on a $a = x$, $b = y$. Toutefois quelques applications sont faites d'une autre manière. Telle, par exemple, la belle démonstration qu'il fournit du théorème de Ptolémée, et la fameuse preuve qu'il donne qu'une équation algébrique a toujours une racine de la forme $a + bi$.

Wessel n'a que deux exemples de l'application de ses théories, savoir sa démonstration du théorème de Cotes (§§ 17 et 18) et sa théorie de la résolution des polygones plans (§§ 19-24). C'est surtout la dernière de ces théories qui est intéressante et prouve bien à quoi, de son temps, on pouvait appliquer la théorie des nombres imaginaires.

Il suppose que les sens positifs des côtés du polygone se suivent en série continue, et par angle du polygone il entend l'angle que fait le prolongement d'un côté avec le côté suivant, par conséquent ce que nous avons l'habitude de nommer angle adjacent à l'un des angles du polygone.

Si donc, dans la série, on appelle $\textsc{ii}$, $\textsc{iv}$, $\textsc{vi}$, etc. les longueurs de côté, $\textsc{i}$, $\textsc{iii}$, $\textsc{v}$, les angles, et qu'on entende par $\textsc{i}'$ le nombre complexe $\cos\textsc{i} + \varepsilon \sin\textsc{i}$ ($\varepsilon = \sqrt{-1}$ dans la nomenclature de Wessel), on a

$$\textsc{ii} + \textsc{iv}\cdot\textsc{iii}' + \textsc{vi}\cdot\textsc{iii}'\cdot\textsc{v}' + \textsc{viii}\cdot\textsc{iii}'\cdot\textsc{v}'\cdot\textsc{vii}' = 0,$$

en supposant que le polygone soit un quadrilatère. Combinée avec le fait que la somme des angles du polygone est égale à zéro (ou à un nombre entier

---

l'un pour la multiplication, l'autre pour l'addition des lignes dirigées, et il a été observé que, ces principes résultant d'inductions qui ne possèdent pas un degré suffisant d'évidence, ils ne pouvaient, quant à présent, être admis que comme des hypothèses que leurs conséquences ou des raisonnements rigoureux pourront faire admettre ou rejeter.» Ce n'est que longtemps après que, dans sa lettre aux *Annales des mathématiques,* Argand donne ses principes comme pouvant être pris pour des définitions.

de révolutions), cette proposition sert à trouver tous les éléments d'un polygone, si l'on en donne un nombre suffisant. Il va sans dire qu'on peut faciliter cette solution en choisissant arbitrairement le côté par où l'on commence, de même qu'au lieu d'une équation, l'on peut employer l'équation conjuguée. On peut noter que Wessel introduit un symbole spécial pour les quantités imaginaires conjuguées; par exemple, il représente par $1^{-\prime}$ le nombre imaginaire conjugué à $1'$ *).

*) Les renseignements biographiques sont tirés les uns de Moë: *Tidsskrift for den norske Personalhistorie*, 1re série, fascic. 1—9, Chra. 1840, d'autres de C. Molbech: *Det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Historie i dets förste Aarhundrede 1742-1842*, Copenhague 1843, ainsi que d'Erslev: *Forfatterlexicon*, vol. III.

Avril 1896.

Seconde préface.

Par

T.-N. Thiele.

Pour arriver à une détermination analytique de la position des points dans l'espace à trois dimensions, Wessel, qui possédait des notions assez correctes sur la définition de l'addition et de la multiplication, donne d'abord, conformément aux résultats de ses recherches sur le plan,

$$x + \eta y + \varepsilon z$$

comme expression générale d'une «droite», c'est-à-dire de la différence de position de deux points, x, y et z désignant les coordonnées d'un système d'axes rectangulaires sur lesquels 1, y et ε marquent respectivement les unités de longueur positives. Sans craindre ce qu'il pourrait y avoir de paradoxal à attribuer à une équation du second degré plus de deux racines, il assigne à η^2 ainsi qu'à ε^2 la valeur -1.

La difficulté du problème, à savoir la rotation, se présentant ensuite, il la réduit (§§ 22-34) en décomposant chaque rotation en rotations autour des deux axes η et ε dont l'un est perpendiculaire à l'autre. Pour désigner ces deux genres d'opérations, Wessel se sert d'un seul et même signe („), en marquant la différence par celle des lettres η ou ε qui entre dans la fonction opératrice (ou bien par les chiffres romains pairs ou impairs dont il se sert symboliquement pour ces fonctions opératrices: comme par exemple $\text{I}' = e^{\varepsilon a}$, $\text{II}' = e^{\eta B}$). Ainsi

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \,„\, e^{\varepsilon a}$$

représente la rotation autour de l'axe η mesurée par l'angle a. Wessel démontre que dans cette expression le terme axial ηy reste invariable:

$$\eta y \,„\, e^{\varepsilon a} = \eta y,$$

tandis que pour les autres termes l'opération se réduit à une simple multiplication

$$(x + \varepsilon z) \,,,\, e^{\varepsilon a} = (x + \varepsilon z) e^{\varepsilon a} .$$

L'opération est distributive en ce qui concerne le terme sur lequel elle porte; il vient donc

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \,,,\, e^{\varepsilon a} = (x \cos a - z \sin a) + \eta y + \varepsilon (x \sin a + z \cos a) .$$

L'expression analogue

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \,,,\, e^{\mu B}$$

désigne la rotation autour de l'axe ε mesurée par l'angle B, et ici c'est le terme εz qui ne change point; les deux autres sont multipliés par $e^{\eta B}$:

$$(x + \eta y + \varepsilon z \,,,\, e^{\eta B} = (x \cos B - y \sin B) + \eta (x \sin B + y \cos B) + \varepsilon z .$$

Tandis que les rotations consécutives autour d'un même axe se composent par la multiplication des opérateurs

$$s \,,,\, e^{\varepsilon a} \,,,\, e^{\varepsilon b} = s \,,,\, e^{\varepsilon (a+b)} ,$$

des séries alternatives de rotations autour des axes y et ε nous mènent à des rotations plus générales autour d'un axe quelconque.

Wessel, qui déjà en traitant le plan ne s'était point montré empressé à donner des applications qui nous feraient voir l'utilité et les caractéristiques de sa méthode d'opération, se contente de ce résultat absolument exact et satisfaisant en principe, il est vrai, mais qui, en tant que théorie de l'espace, ne saurait être considéré que comme un commencement contenant en germe toute une série de problèmes. De ces problèmes, il n'en relève qu'un seul, selon nous le moins intéressant. Par une très belle et très nette conception des figures qui, pendant une série de rotations alternatives (y et ε), sont tracées sur une sphère tournante par des points fixes se trouvant principalement sur les axes mêmes η et ε, il obtient les équations fondamentales de la trigonométrie sphérique et de la polygonométrie.

A la fin il expose la théorie des polygones gauches.

La trigonométrie sphérique est même traitée avec beaucoup de détails et occupe une grande partie de son mémoire. Ce qu'on y trouvera de plus remarquable, c'est peut-être que Wessel ne soit point tombé sur les équations de Gauss ou de Delambre, bien qu'il ait été dans des conditions toutes spéciales pour faire ici l'heureuse découverte d'un fruit déjà mûr.

Wessel ne mentionne même pas que la série des rotations alternatives nécessaires pour représenter une rotation générale se compose de trois rotations, ε, η, ε ou bien η, ε, η; encore moins touche-t-il au problème tout indiqué, à savoir la détermination de l'axe de rotation et de l'angle de la rotation générale correspondante à ces séries de rotations alternatives spéciales.

Il faut bien le regretter, autrement il n'aurait pu manquer d'arriver aux équations de Gauss, peut-être même aux quaternions.

La troisième des rotations spéciales importantes, la rotation autour de l'axe réel, n'a pas non plus attiré ses regards, ou, pour mieux dire, il semble en détourner exprès l'attention comme s'il s'était proposé d'en faire, à l'occasion, l'objet d'un travail à part. Tout au moins on s'étonne qu'à d'autres égards encore Wessel ait été aussi avare d'aperçus sur les divers rapports de l'axe réel pendant la rotation, surtout qu'il n'ait pas donné des développements de

$$1 \,,,\, e^{\varepsilon a} \,,,\, e^{\eta B} \,,,\, e^{\varepsilon c} \,,,\, \ldots$$

tandis qu'au § 34 il traite longuement

$$\eta \,,,\, e^{\varepsilon a} \,,,\, e^{\eta B} \,,,\, e^{\varepsilon c} \ldots \qquad \text{et au § 35} \qquad \varepsilon \,,,\, e^{\varepsilon a} \,,,\, e^{\eta B} \,,,\, e^{\varepsilon c} \ldots$$

Et si au § 37, 6 *b* il décrit la figure tracée sur une sphère par l'axe réel pendant les rotations alternatives ε et η, trahissant ainsi sa connaissance de quelques-unes des propriétés de la rotation autour de l'axe réel, il a grande hâte ensuite de se retrancher derrière les limites qui lui sont imposées, avec des excuses presque aussi longues que toute la digression.

Qu'on se rappelle qu'une rotation autour de l'axe réel mesurée par l'angle v doit transformer

$$x + \eta y + \varepsilon z \quad \text{en} \quad x + \eta(y \cos v - z \sin v) + \varepsilon(y \sin v + z \cos v)$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}(x + \eta y + \varepsilon z) \,,,\, e^{\zeta v} &= x + (\eta y + \varepsilon z)(\cos v + \zeta \sin v) \\ &= x + \eta(y \cos v - z \sin v) + \varepsilon(y \sin v + z \cos v),\end{aligned}$$

ce qui exige

$$\eta\zeta = \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon\zeta = -\eta$$

ou

$$\eta\eta\zeta = \eta\varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon\varepsilon\zeta = -\varepsilon\eta$$

ou bien

$$\zeta = -\eta\varepsilon = \varepsilon\eta\,,$$

et l'on comprendra et que Wessel ait trouvé ici des difficultés et que c'est ici justement qu'il aurait pu chercher des indications pour des progrès ultérieurs.

En effet cette dernière équation lui aurait valu, à elle seule, la découverte des quaternions. Et quant au problème le plus urgent parmi tous ceux que Wessel avait touchés sans les résoudre: l'explication analytique de son opération stéréométrique „ à l'aide des quatre règles de l'arithmétique, surtout de la multiplication, c'est encore cette même équation qui s'offrait pour lui en donner la solution. Il aurait suffi d'effectuer ces quelques multiplications:

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon v}(x+\eta y+\varepsilon z)e^{\varepsilon v} &= ((x+\varepsilon z)e^{\varepsilon v}+\eta y e^{-\varepsilon v})e^{\varepsilon v} \\ &= (x+\varepsilon z)e^{\varepsilon 2v}+\eta y \\ &= (x+\eta y+\varepsilon z) \text{ „ } e^{\varepsilon 2v} \end{aligned}$$

et d'une manière analogue

$$e^{\eta u}(x+\eta y+\varepsilon z)e^{\eta u} = (x+\eta y+\varepsilon z) \text{ „ } e^{\eta 2u}.$$

D'après les remarques finales de Wessel, il faut croire qu'il n'aurait pas hésité devant le fait qu'ici l'ordre des facteurs n'est pas arbitraire.

C'est donc l'omission du troisième axe qui l'a empêché de trouver l'explication de la ressemblance entre ces opérations „ et la multiplication, ressemblance qu'il avait pourtant bien remarquée.

A quoi bon démontrer, avec force renvois à son mémoire (voy. surtout §§ 10, 37 init., 71), combien de fois il a senti l'analogie et par quels moyens insuffisants il a cherché à expliquer la différence? Qu'il nous suffise de reconnaître que son bon sens et la justesse de ses résultats ne se sont jamais démentis. Dans la nouvelle voie dont il a très bien vu l'importance, il ne lui a été permis de faire que ces quelques pas préliminaires; mais ces pas il les a faits dans la bonne direction, sans jamais dévier, et nous n'avons qu'à continuer comme il avait si bien commencé pour arriver au calcul complet des quaternions de la manière la plus naturelle et la plus simple.

Essai

sur

la représentation analytique de la direction,

avec des applications,

en particulier à la détermination des polygones plans
et des polygones sphériques.

Par

Caspar Wessel,
arpenteur.

[Présenté à l'Académie Royale de Danemark dans sa séance du 10 mars 1797.]

[Note sur la traduction.]

[La traduction en français du mémoire de Wessel a soulevé plusieurs difficultés. Wessel n'avait à sa disposition pour exprimer des idées entièrement nouvelles qu'un langage mathématique encore très peu développé. Il a su s'en servir de manière à ne laisser planer aucun doute sur ce qu'il voulait dire, et à faire ressortir partout la clarté et la justesse de ses pensées; mais très souvent il n'y est parvenu que par de longues et laborieuses explications sur des opérations et des notions qu'on a su plus tard exprimer d'une manière simple et concise.

Il fallait conserver dans la traduction les caractères de ce style. C'est ce que nous avons tenté de faire, d'abord par respect pour la pensée de l'auteur, et ensuite afin de ne pas paraître attribuer à ses idées un développement qui ne s'est réalisé qu'après lui — et indépendamment de lui.

Toutefois, afin de faciliter la lecture, nous avons fait une exception à cet égard en empruntant au langage des mathématiques modernes un seul terme assez commode, ce qui nous était bien permis à condition d'avouer cette petite infidélité au texte original. Wessel appelle *ligne droite* ou simplement *ligne* une droite dont on connaît la direction, le sens et la grandeur, ce que nous appelons aujourd'hui segment (*Strecke*) ou vecteur. Nous avons cru contribuer à la clarté de l'exposition en nous servant constamment de l'expression segment pour rendre cette notion, qui joue un rôle capital dans le travail de Wessel.

Les difficultés de la traduction se sont augmentées du fait qu'il n'a pas été possible de trouver une seule et même personne réunissant à un degré suffisant les conditions indispensables pour les surmonter: la connaissance des deux langues et l'intelligence mathématique du mémoire. Il a donc été nécessaire de diviser le travail entre plusieurs personnes. Quant à la fidélité même de la traduction, la responsabilité en incombe au soussigné, qui avait pour tâche de surveiller la présente réédition.

Les indications ou notes entre crochets [] sont dues au traducteur.]

[H.-G. Zeuthen.]

Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-á-dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique entre un seul segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu.

Pour pouvoir répondre à cette question, je vais m'appuyer sur deux considérations qui me paraissent évidentes. En premier lieu, la variation de direction qu'on peut produire par des opérations algébriques doit être représentée aussi par leurs symboles. En second lieu, on ne peut soumettre la direction à l'algèbre qu'en faisant dépendre ses variations d'opérations algébriques. Or, selon la conception ordinaire, on ne peut la transformer par ces opérations qu'en la direction opposée ou bien de positive en négative, et réciproquement. Il s'ensuit que ces deux directions seulement seraient susceptibles d'une représentation analytique conforme à la conception connue, et que la solution du problème serait impossible pour les autres directions. C'est probablement pour cette raison que personne ne s'est occupé de cette matière*). Sans doute on ne s'est pas cru permis de rien changer à la définition une fois adoptée des opérations.

*) Il est possible néanmoins que magister Gilbert de Halle ait donné des explications sur ce sujet dans un mémoire couronné ayant pour titre *Calculus situs*. [Note de l'auteur. — Les efforts que M. Stäckel a bien voulu faire pour retrouver ce mémoire, qui n'a pas été imprimé, n'ont pas abouti. Du reste les livres publiés par Gilbert ne contiennent rien qui confirme la supposition de Wessel sur ce qu'aurait contenu le mémoire en question.]

A cela il n'y a rien à objecter, tant que la définition est appliquée à des quantités ordinaires; mais il existe des cas spéciaux où la nature propre des quantités semble nous inviter à donner aux opérations des définitions particulières. Alors, si l'on trouve ces définitions avantageuses, il me paraît qu'on ne doit pas les rejeter. En effet, en passant de l'arithmétique à l'analyse géométrique, c'est-à-dire des opérations relatives à des nombres abstraits aux opérations sur des segments de droite, on aura à considérer des quantités qui peuvent avoir entre elles non seulement les mêmes relations que les nombres abstraits, mais aussi un grand nombre de relations nouvelles. Essayons donc de généraliser la signification des opérations: n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage aux segments de droite de même sens ou de sens opposés, mais étendons-en un peu la notion de façon qu'elles s'appliquent, non seulement aux mêmes cas qu'auparavant, mais encore à une infinité d'autres cas. Si en même temps qu'on prend cette liberté on respecte les règles ordinaires des opérations, on ne tombe point en contradiction avec l'ancienne théorie des nombres, mais on la développe seulement, on s'accommode à la nature des quantités et on observe la règle générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisée à comprendre une théorie difficile. Il n'est donc pas absurde d'exiger qu'on prenne en géométrie les opérations dans un sens plus étendu qu'en arithmétique. On admettra aussi sans difficulté qu'il sera possible ainsi de faire varier d'une infinité de manières la direction des segments. Par là précisément (comme on le démontrera plus loin) non seulement on réussit à éviter toutes les opérations impossibles*) et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour chercher le possible, mais encore on parvient à exprimer la direction des segments de droite situés dans un même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur, sans que la mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles ou de nouvelles règles. Or il faut convenir que la démonstration générale de théorèmes géométriques devient souvent plus facile lorsqu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la sou-

---

*) [On observera que l'auteur appelle *impossibles* les nombres, les quantités et les opérations *imaginaires*.]

mettre aux règles des opérations algébriques, que lorsqu'on est réduit à la représenter par des figures qui ne sont applicables qu'à des cas particuliers. Il paraît donc être non seulement admissible, mais même avantageux, de se servir d'opérations embrassant d'autres segments que ceux qui ont le même sens ou le sens opposé.

Pour ces raisons je me suis proposé:

1° de donner les règles des opérations de cette nature;

2° d'en montrer par quelques exemples l'application aux cas où les segments se trouvent dans le même plan;

3° de déterminer par une méthode nouvelle, qui n'est pas algébrique, la direction des segments situés dans des plans différents;

4° d'en déduire la résolution générale des polygones plans et des polygones sphériques;

5° de déduire de la même manière les formules connues de la trigonométrie sphérique.

Voilà, brièvement indiqué, le contenu du présent mémoire. Ce qui m'a a donné l'occasion de l'écrire, c'est que je cherchais une méthode qui permît d'éviter les opérations impossibles; l'ayant découverte, je l'ai employée pour me convaincre de la généralité de certaines formules connues. M. le conseiller Tetens a eu la patience de lire ces premières recherches, et c'est aux encouragements, aux conseils et aux communications instructives de ce savant célèbre que ce mémoire doit de se présenter actuellement sous une forme moins imparfaite, et aussi d'avoir été jugé digne d'être inséré dans la collection des mémoires de l'Académie royale des sciences et des lettres.

I.

Sur une méthode servant à obtenir, par des opérations algébriques, des segments de droite au moyen d'autres segments, et en particulier sur la direction qu'il faut leur attribuer et le symbole propre à les désigner.

Il existe des grandeurs homogènes qui, lorsqu'elles s'appliquent au même sujet, ne produisent les unes sur les autres d'autres modifications que de simples augmentations ou diminutions.

Il y en a d'autres qui, dans le même cas, peuvent se modifier les unes les autres d'une infinité d'autres manières. Les segments de droite appartiennent à la dernière classe.

On peut, par exemple, d'une infinité de manières, changer la distance d'un point à un plan en faisant parcourir au point une droite plus ou moins inclinée sur le plan.

En effet, si la droite est perpendiculaire*), c'est-à-dire si le chemin du point fait un angle droit avec la normale au plan**), le point se meut parallèlement au plan, et le chemin parcouru n'a aucune influence sur sa distance au plan.

Si la droite est indirecte, c'est-à-dire si elle fait un angle aigu ou obtus avec la normale, le segment parcouru contribuera d'une quantité moindre que sa propre longueur à l'augmentation ou à la diminution de la distance, ce qui peut se faire d'une infinité de manières.

Enfin si la droite est directe, c'est-à-dire si elle a la même direction que la normale, elle ajoute ou soustrait à la distance toute sa longueur; dans le premier cas elle est positive, dans le second négative.

Tous les segments de droite qui peuvent être décrits par un point mobile sont donc, eu égard à leur effet sur la distance donnée du point à un

---

*) [L'auteur ne possède évidemment pas la notion de l'angle que fait une droite avec un plan; *perpendiculaire* veut dire perpendiculaire à la normale.]

**) [L'auteur dit l'*axe* du plan.]

plan fixe, soit directs, soit indirects, soit perpendiculaires,*) suivant qu'ils ajoutent ou retranchent à la distance une quantité égale à toute la longueur du segment donné, à une partie de ce segment, ou à zéro.

Puisqu'on appelle quantité absolue celle qui est donnée directement et non par ses relations avec d'autres quantités, on peut dans les définitions précédentes désigner la distance sous le nom de segment absolu, et quant à la contribution du segment relatif au changement de longueur du segment absolu, on peut l'appeler l'effet du segment relatif.

Il y a d'autres quantités que les segments, qui sont susceptibles des relations que je viens d'indiquer. Il ne serait donc pas inutile d'expliquer ces relations d'une manière générale et d'en faire entrer la notion générale dans la définition des opérations. Mais puisque l'avis des connaisseurs d'une part, de l'autre le cadre du présent mémoire, et enfin la clarté de l'exposition exigent qu'on n'embarrasse pas le lecteur de notions si abstraites, je me placerai seulement au point de vue géométrique.

Je dis donc que:

§ 1.

L'addition de deux segments se fait de la manière suivante: on les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se termine; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue: ce nouveau segment s'appelle alors la somme des segments donnés.

Si par exemple un point avance de trois pieds, puis recule de deux pieds, la somme des deux chemins ne s'obtiendra pas en ajoutant aux trois premiers pieds les deux derniers; mais elle sera égale à un pied compté en avant, puisque ce dernier chemin, parcouru par le point, a le même effet que l'ensemble des deux autres chemins.

De même, quand l'un des côtés d'un triangle va de a à b, le second de b à c, on doit appeler le troisième, qui va de a à c, la somme des deux autres, et le désigner par $ab + bc$, en sorte que ac et $ab + bc$ ont la même

*) «Indifférents» serait préférable, s'il n'offensait pas les oreilles qui n'y sont pas accoutumées. [Note de l'auteur.]

signification ou que $ac = ab + bc = -ba + bc$, si ba signifie le segment opposé à ab.

Si les segments ajoutés sont directs, cette définition est complètement d'accord avec la définition ordinaire. S'ils ne sont pas directs, on ne rompt pas l'analogie en disant qu'un segment est la somme de deux autres s'il a le même effet que ceux-là. La signification que j'ai attribuée au symbole $+$ n'a rien non plus d'extraordinaire; par exemple, dans l'expression $ab + \frac{ba}{2} = \frac{1}{2}ab$, le terme $\frac{ba}{2}$ ne fait pas partie de la somme. Il est donc permis aussi de poser $ab + bc = ac$ sans qu'il soit nécessaire de se figurer bc comme une partie de ac; $ab + bc$ est seulement le symbole par lequel on désigne ac.

§ 2.

Pour ajouter plus de deux segments, on suit la même règle: on les combine de façon que l'extrémité du premier coïncide avec le premier point du second, l'extrémité de celui-ci avec le premier point du troisième, etc.; puis on joint par un segment le point où le premier segment commence au point où le dernier se termine, et on appelle ce dernier segment la somme de tous les segments donnés.

Peu importe quel segment on prend pour le premier, quel pour le second, le troisième, etc. Car si un point décrit un segment de droite, ce segment aura le même effet sur les distances du point à trois plans perpendiculaires entre eux, quelle que soit sa situation par rapport aux plans; par conséquent, lorsqu'on ajoute plusieurs segments, la contribution de l'un d'eux à la détermination de la position de l'extrémité de la somme reste la même, que ce segment soit le premier, qu'il soit le dernier, ou qu'il occupe un autre rang quelconque. Par conséquent, dans l'addition des segments, l'ordre des termes est arbitraire, et la somme reste toujours la même, parce que, supposé donné son premier point, le dernier aura toujours la même position.

Pour cette raison on peut aussi dans ce cas représenter la somme en unissant par le signe $+$ les segments ajoutés. Par exemple, lorsqu'on a tiré dans un quadrilatère le premier côté de a à b, le second de b à c, le troisième de c à d, mais le quatrième de a à d, on aura $ad = ab + bc + cd$.

§ 3.

Si la somme de plusieurs longueurs, largeurs et hauteurs est égale à zéro, la somme des hauteurs, celle des largeurs et celle des hauteurs, prises séparément, seront aussi égales à zéro.

§ 4.

Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou absolu qu'on a pris égal à 1; c'est-à-dire que:

1° Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive;

2° Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité;

3° En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.

§ 5.

Désignons par $+1$ l'unité rectiligne positive, par $+\varepsilon$ une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine: alors l'angle de direction de $+1$ sera égal à $0°$, celui de -1 à $180°$, celui de $+\varepsilon$ à $90°$ et celui de $-\varepsilon$ à $-90°$ ou à $270°$; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura: $(+1)\cdot(+1) = +1$, $(+1)\cdot(-1) = -1$, $(-1)\cdot(-1) = +1$, $(+1)\cdot(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1)\cdot(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)\cdot(+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)\cdot(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = -1$.

Il en résulte que ε est égal à $\sqrt{-1}$ et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opération ordinaires.

§ 6.

Le cosinus d'un arc de cercle ayant pour origine l'extrémité de son rayon $+1$ est le segment de ce rayon ou du rayon diamétralement opposé qui commence au centre et se termine à la projection orthogonale de l'autre bout de l'arc. Le sinus du même arc est mené perpendiculairement de l'extrémité du cosinus à l'extrémité de l'arc.

D'après le § 5, le sinus d'un angle droit est donc égal à $\sqrt{-1}$. Posons $\sqrt{-1} = \varepsilon$; désignons par v un angle quelconque et par $\sin v$ un segment de la même longueur que le sinus de l'angle, mais positif lorsque l'arc qui mesure l'angle se termine sur la première demi-circonférence, négatif lorsqu'il se termine sur la dernière demi-circonference. Alors d'après les §§ 4 et 5, $\varepsilon \sin v$ exprimera le sinus de l'angle v en direction et en grandeur.

§ 7.

Conformément aux §§ 1 et 6, le rayon qui commence au centre et dévie de l'angle v de l'unité positive ou absolue est égal à $\cos v + \varepsilon \sin v$. Or, d'après le § 4, le produit de deux facteurs dont l'un fait avec l'unité l'angle v, et l'autre l'angle u, fera avec la même unité l'angle $u+v$. Donc, lorsqu'on multiplie le segment de droite $\cos v + \varepsilon \sin v$ par le segment $\cos u + \varepsilon \sin u$, le produit sera un segment de droite dont l'angle de direction est égal à $v+u$. Par conséquent on peut, d'après les §§ 1 et 6, désigner le produit par $\cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u)$.

§ 8.

On peut encore exprimer d'une autre manière ce produit

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) \quad \text{ou} \quad \cos(u+v) + \varepsilon \sin(u+v)$$

en formant la somme des produits partiels obtenus en multipliant chacun des segments dont la somme constitue l'un des facteurs par chacun des segments dont la somme constitue l'autre facteur. On aura ainsi

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u + \varepsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v),$$

ce qui est une conséquence des deux formules bien connues de la trigonométrie

$$\cos(v+u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u,$$
$$\sin(v+u) = \cos v \sin u + \cos u \sin v.$$

On peut, rigoureusement et sans aucune difficulté, démontrer ces formules dans tous les cas, que les deux angles ou seulement l'un deux soient positifs ou négatifs, plus grands ou plus petits qu'un angle droit. Donc les théorèmes qu'on en peut déduire sont exacts dans toute leur généralité.

§ 9.

Le segment de droite représenté par $\cos v + \varepsilon \sin v$ est, d'après le § 7, un rayon de cercle dont la longueur est égale à 1 et dont la déviation par rapport à $\cos 0°$ est égale à l'angle v. Il s'ensuit que $r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \sin v$ désigne un segment de droite dont la longueur est égale à r et dont l'angle de direction est v; car si l'on rend les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle r fois plus grands, l'hypoténuse devient en même temps r fois plus grande et les angles restent inaltérés. Or, la somme des côtés de l'angle droit est, d'après le § 1, égale à l'hypoténuse; par conséquent on a $r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \cos v = r(\cos v + \varepsilon \sin v)$. Voilà donc l'expression générale d'un segment de droite quelconque, qui est situé dans le plan de $\cos 0°$ et de $\varepsilon \sin 90°$, qui dévie de v degrés par rapport à $\cos 0°$ et dont la longueur est r.

§ 10.

Si nous désignons par a, b, c, d des segments de droite directs d'une longueur quelconque, positifs ou négatifs, et que les deux segments indirects $a + \varepsilon b$ et $c + \varepsilon d$ se trouvent dans le même plan que l'unité absolue, on pourra trouver leur produit, même dans le cas où leurs déviations par rapport à l'unité absolue est inconnue*). Il suffit en effet de multiplier chacun des segments qui constituent l'une des sommes par chacun de ceux qui constituent l'autre somme; alors la somme de ces produits représentera le produit cherché en longueur et en direction, de sorte que $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$.

Démonstration. Soient A la longueur du segment $a + \varepsilon b$ et v degrés sa déviation par rapport à l'unité absolue; soient C la longueur du segment $c + \varepsilon d$ et u sa déviation; alors, d'après le § 9, on aura

$$a + \varepsilon b = A \cdot \cos v + A \cdot \varepsilon \sin v, \quad c + \varepsilon d = C \cdot \cos u + C \cdot \varepsilon \sin u,$$

et par conséquent

$$a = A \cdot \cos v, \quad b = A \cdot \sin v, \quad c = C \cdot \cos u, \quad d = C \cdot \sin u \qquad (§\, 3).$$

*) [C'est-à-dire sans en déterminer préalablement les déviations.]

Or, d'après le § 4, on aura

$$(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d) = A\cdot C\cdot[\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u)]$$
$$= A\cdot C\cdot[\cos v\cos u-\sin v\sin u+\varepsilon(\cos v\sin u+\cos u\sin v)]$$

(§ 8). Donc, en remplaçant $A\cdot C\cos v\cos u$ par ac et $A\cdot C\cdot\sin v\sin u$ par bd, etc., on obtiendra le résultat qu'il fallait démontrer.

Il s'ensuit que les cas mêmes où les segments à ajouter ne sont pas tous directs ne font point exception à la règle bien connue qui est la base soit de la théorie des équations soit de la théorie des fonctions entières et de leurs *divisores simplices*, à savoir que, pour multiplier deux sommes l'une par l'autre, il faut multiplier chaque terme de l'une des sommes par chaque terme de l'autre. Donc, si une équation entre des segments de droite admet une racine de la forme $a+\varepsilon b$, cette racine représentera un segment indirect. Mais si l'on avait à multiplier des segments de droite qui ne se trouvent pas tous les deux dans un plan passant par l'unité absolue, on ne pourrait appliquer la règle précédente. C'est pour cette raison que je ne m'occupe pas de la multiplication de tels segments. Une autre manière de représenter la variation de leurs directions se trouve plus loin aux §§ 24—35.

§ 11.

Le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende. Il n'est donc pas nécessaire de démontrer que les trois segments doivent se trouver dans un plan passant par l'unité absolue, car cela résulte immédiatement de la définition donnée au § 4. De même on voit aisément que le quotient doit faire l'angle $v-u$ avec l'unité absolue, si le dividende fait l'angle v et le diviseur l'angle u avec cette même unité.

Si par exemple on a à diviser $A(\cos v+\varepsilon\sin v)$ par $B(\cos u+\varepsilon\sin u)$, le quotient sera $\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]$, parce qu'on a d'après le § 7

$$\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]\cdot B(\cos u+\varepsilon\sin u) = A(\cos v+\varepsilon\sin v);$$

ou bien, comme $\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)]$ multiplié par le diviseur $B(\cos u+\varepsilon\sin u)$ est égal au dividende $A(\cos v+\varepsilon\sin v)$, le quotient cherché sera

$$\frac{A}{B}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)].$$

§ 12.

Si a, b, c, d sont des segments directs et que $a+\varepsilon b$ et $c+\varepsilon d$ se trouvent dans un plan passant par l'unité absolue, on aura $\dfrac{1}{c+\varepsilon d} = \dfrac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}$ et le quotient sera égal à

$$\frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d} = (a+\varepsilon b)\cdot\frac{1}{c+\varepsilon d} = (a+\varepsilon b)\cdot\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2}$$
$$= [ac+bd+\varepsilon(bc-ad)]:(c^2+d^2).$$

En effet, d'après le § 9, on peut poser

$$a+\varepsilon b = A(\cos v+\varepsilon\sin v)$$

et

$$c+\varepsilon d = C(\cos u+\varepsilon\sin u),$$

d'où résulte, d'après le § 3,

$$c-\varepsilon d = C(\cos u-\varepsilon\sin u).$$

Or, comme on a (§ 10)

$$(c+\varepsilon d)(c-\varepsilon d) = c^2+d^2 = C^2,$$

on aura

$$\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2} = \frac{1}{C}(\cos u-\varepsilon\sin u) \qquad (\S\ 10)$$

ou bien

$$\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2} = \frac{1}{C}[\cos(-u)+\varepsilon\sin(-u)] = \frac{1}{c+\varepsilon d} \qquad (\S\ 11).$$

En multipliant ensuite par

$$a+\varepsilon b = A(\cos v+\varepsilon\sin v),$$

on obtiendra

$$(a+\varepsilon b)\cdot\frac{c-\varepsilon d}{c^2+d^2} = \frac{A}{C}[\cos(v-u)+\varepsilon\sin(v-u)] = \frac{a+\varepsilon b}{c+\varepsilon d} \qquad (\S\ 11).$$

Les quantités indirectes de cette nature partagent donc avec les quantités directes la propriété que, si le dividende est une somme, on obtient, en divisant chaque terme de cette somme par le diviseur, plusieurs quotients dont la somme est le quotient cherché.

§ 13.

m étant un nombre entier, on obtient, en multipliant l'expression $\cos\frac{v}{m} + \varepsilon \sin\frac{v}{m}$ m fois par elle-même, la puissance $\cos v + \varepsilon \sin v$ (§ 7); donc

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{v}{m} + \varepsilon \sin\frac{v}{m}.$$

Mais, d'après le § 11,

$$\cos\left(-\frac{v}{m}\right) + \varepsilon \sin\left(-\frac{v}{m}\right) = \frac{1}{\cos\frac{v}{m} + \varepsilon \sin\frac{v}{m}}$$

$$= \frac{1}{(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}} = (\cos v + \varepsilon \sin v)^{-\frac{1}{m}};$$

par conséquent on a toujours, que m soit positif ou négatif,

$$\cos\frac{v}{m} + \varepsilon \sin\frac{v}{m} = (\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}};$$

donc on aura toujours

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m} v + \varepsilon \sin\frac{n}{m} v,$$

m et n étant des nombres entiers quelconques.

On trouve de cette manière la valeur des expressions telles que $\sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}$ ou $\sqrt[m]{a + \sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}}$; on peut par exemple représenter $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ par un segment de droite dont la longueur est égale à 2 et dont l'angle avec l'unité positive a pour mesure 10°.

§ 14.

Deux angles qui ont le même sinus et le même cosinus ont une différence qui est égale soit à 0, soit à ± 4 angles droits, soit à un multiple de ± 4 angles droits; et réciproquement, si la différence de deux angles est égale soit à 0, soit à ± 4 angles droits, pris une ou plusieurs fois, alors leurs sinus, ainsi que leurs cosinus, sont égaux respectivement.

§ 15.

m étant un nombre entier et $\pi = 360°$ *), $(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}$ a seulement les m valeurs différentes qui suivent:

$$\cos\frac{v}{m} + \varepsilon \sin\frac{v}{m}\text{**)},\ \cos\frac{\pi+v}{m} + \varepsilon\sin\frac{\pi+v}{m},\ \cos\frac{2\pi+v}{m}+\varepsilon\sin\frac{2\pi+v}{m},\ \ldots,$$
$$\cos\frac{(m-1)\pi+v}{m} + \varepsilon\sin\frac{(m-1)\pi+v}{m};$$

car les nombres par lesquels π est multiplié dans la série précédente forment une progression arithmétique 1, 2, 3, 4, ... $m-1$. Donc la somme de deux termes est égale à m, quand l'un est aussi éloigné de 1 que l'autre l'est de $m-1$; et si le nombre des termes est impair, le terme du milieu multiplié par 2 sera égal à m. Par conséquent, quand on fera la somme des deux termes $\frac{(m-n)\pi+v}{m}$ et $\frac{(m-u)\pi+v}{m}$, si le dernier est aussi éloigné de $\frac{\pi+v}{m}$ que $\frac{(m-n)\pi+v}{m}$ l'est de $\frac{(m-1)\pi+v}{m}$, cette somme sera égale à

$$\frac{2m-u-n}{m}\pi + \frac{2v}{m} = \pi + \frac{2v}{m}.$$

Or l'addition de $\frac{(m-n)\pi}{m}$ équivaut à la soustraction de $\frac{(m-n)(-\pi)}{m}$; donc les angles $\frac{(m-n)(-\pi)+v}{m}$ et $\frac{(m-u)\pi+v}{m}$ auront, d'après le § 14, le même cosinus et le même sinus, puisque leur différence est égale à π; de même $\frac{(m-u)(-\pi)+v}{m}$ aura mêmes cosinus et sinus que $\frac{(m-n)\pi+v}{m}$; par conséquent $-\pi$ ne donne pas d'autres valeurs que $+\pi$. Il ne se trouve pas dans cette suite des valeurs égales entre elles; car la différence de deux angles de la série est toujours plus petite que π et elle n'est jamais égale à 0. On ne trouve pas non plus d'autres valeurs en continuant la série; car les angles deviendront alors $\pi+\frac{v}{m}$, $\pi+\frac{\pi+v}{m}$, $\pi+\frac{2\pi+v}{m}$, etc.; donc, d'après le § 14,

*) [En continuant la lecture, il faut bien se rappeler cet usage extraordinaire de la lettre π.]
**) [L'édition originale a $\cos v + \varepsilon \sin v$.]

les valeurs de leurs cosinus et de leurs sinus redeviendront les mêmes. Si l'on rencontrait des angles ne faisant pas partie de la série, π ne serait pas, dans leurs numérateurs, multiplié par un nombre entier, et la multiplication des angles par m ne donnerait pas un angle dont la différence avec v serait égale à 0 ou $\pm\pi$ ou à un multiple de $\mp\pi$; et par conséquent la $m^{\text{ième}}$ puissance de la combinaison du cosinus et du sinus d'un tel angle ne serait pas égale à $\cos v + \varepsilon \sin v$.

§ 16.

Sans connaître l'angle que fait le segment indirect $1+x$ avec l'unité absolue, on trouve, dans le cas où la longueur de x est plus petite que 1, pour la puissance $(1+x)^m$ l'expression

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^2 + \dots$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de m, elle conservera sa valeur et se transformera en

$$1 + \frac{ml}{1} + \frac{m^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

où

$$l = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$$

l est la somme d'un segment direct et d'un segment perpendiculaire à l'unité absolue. Si l'on désigne par a le segment direct et par $b\sqrt{-1}$ le segment perpendiculaire, b sera la plus petite valeur positive de l'angle que forme $1+x$ avec l'unité absolue, et si l'on pose

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = e,$$

on pourra représenter $(1+x)^m$ ou $1 + \frac{ml}{1} + \frac{m^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ par $e^{ma + mb\sqrt{-1}}$, cela veut dire que $(1+x)^m$ a la longueur e^{ma} et l'angle de direction mb, que m soit positif ou négatif. On aura ainsi une nouvelle manière de représenter la direction des segments dans le même plan à l'aide des logarithmes naturels.

Je présenterai une autre fois, si l'Académie me le permet, les preuves complètes de ces théorèmes. Ayant rendu compte à présent de la manière dont il faut, selon moi, entendre la somme, le produit, le quotient et la puissance des segments de droite, je me bornerai ici à donner quelques exemples de l'application de la méthode.

II.

Démonstration du théorème de Cotes.

§ 17.

Je suppose connu que, si l'équation $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + sx + t = 0$ a les n racines $a, b, c, \ldots g$, la fonction entière $z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \ldots + sz + t$ aura les *divisores simplices* $z-a$, $z-b$, $z-c$, ..., $z-g$, et en sera le produit.

§ 18.

Le théorème de Cotes consiste en ce que:

Si les arcs de cercle ab, bc, cd, de, ea (fig. 1) sont en nombre n et ont les mesures $\frac{360°}{n} = \frac{\pi}{n}$, qu'on pose le rayon $oa = r$, $ao = -r$, $op = z$, $po = -z$, et que p soit l'extrémité des segments ap, bp, cp, dp, ep, on aura

$$ap \cdot bp \cdot cp \cdot dp \cdot ep = z^n - r^n.$$

En effet, on conclut des §§ 1 et 9

$$\begin{aligned}
ap &= z - r, \\
bp &= z - r\left(\cos\frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin\frac{\pi}{n}\right), \\
cp &= z - r\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \varepsilon \sin\frac{2\pi}{n}\right),
\end{aligned}$$

$$dp = z - r\left(\cos\frac{3\pi}{n} + \varepsilon\sin\frac{3\pi}{n}\right),$$

$$ep = z - r\left(\cos\frac{4\pi}{n} + \varepsilon\sin\frac{4\pi}{n}\right),$$

ou

$$ep = z - r\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Or du § 15 on conclut que les racines de l'équation $x^n - r^n = 0$ sont

$$r,\ r\left(\cos\frac{\pi}{n} + \varepsilon\sin\frac{\pi}{n}\right),\ r\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \varepsilon\sin\frac{2\pi}{n}\right), \dots r\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + \varepsilon\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$$

donc on aura d'après le § 17

$$z^n - r^n = ap \cdot bp \cdot cp \cdot dp \cdot ep.$$

Par conséquent la longueur de $z^n - r^n$ est égale au produit des longueurs des segments ap, bp, cp, etc. (§ 4).

Sur la résolution des polygones plans.

§ 19.

Je cite sans démonstration les formules connues de trigonométrie:

a) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$,

b) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

c) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,

d) $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$,

e) $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$,

f) $\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin 2a}{1+\cos 2a}$,

g) $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$,

h) $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$,

i) $\cos b - \cos a = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$,

$$\text{k)}\quad \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2},$$

$$\text{l)}\quad \frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

§ 20.

Pour la résolution des polygones il peut être utile de se rappeler aussi que, si un problème est ramené à la résolution de l'équation $a = b\cos u + c\sin u$, u étant la seule inconnue, on pourra, en posant $\frac{b}{c} = \operatorname{tg}\varphi$ ou $\frac{b}{c} = \cot\psi$, éviter l'équation quadratique qui donnait $\sin u$ et $\cos u$.

On trouve ainsi φ ou ψ, qui est positif ou négatif et n'a pas besoin d'être plus grand que 90°. Une fois φ ou ψ trouvé, on tire u de l'une des équations suivantes:

$$\sin(u+\varphi) = a\sin\varphi : b = a\cos\varphi : c$$

et

$$\cos(u-\psi) = \cos(\psi-u) = \frac{a\cos\psi}{b} = \frac{a\sin\psi}{c}.$$

En effet, si l'on divise par c ou par b les termes de l'équation donnée $a = b\cos u + c\sin u$, et qu'on remplace ensuite $\frac{b}{c}$ par sa valeur $\operatorname{tg}\varphi$ ou $\cot\psi$, et $\frac{c}{b}$ par $\cot\varphi$ ou $\operatorname{tg}\psi$, on obtiendra

$$\frac{a}{c} = \operatorname{tg}\varphi\cos u + \sin u = \cot\psi\cos u + \sin u$$

ou

$$\frac{a}{b} = \cos u + \cot\varphi\sin u = \cos u + \operatorname{tg}\psi\sin u.$$

Donc, si l'on multiplie les termes de la première de ces équations par $\cos\varphi$, ceux de la seconde par $\sin\psi$, ceux de la troisième par $\sin\varphi$ et ceux de la quatrième par $\cos\psi$, on obtiendra

$$\frac{a}{c}\cos\varphi = \sin\varphi\cos u + \cos\varphi\sin u,$$

$$\frac{a}{c}\sin\psi = \cos\psi\cos u + \sin u\sin\psi,$$

$$\frac{a}{b}\sin\varphi = \sin\varphi\cos u + \cos\varphi\sin u,$$

$$\frac{a}{b}\cos\psi = \cos\psi\cos u + \sin u\sin\psi.$$

Donc, d'après le § 19 a) et b),

$$\frac{a\cos\varphi}{c} = \sin(u+\varphi), \quad \frac{a\sin\psi}{c} = \cos(u-\psi) = \cos(\psi-u),$$

$$\frac{a\sin\varphi}{b} = \sin(u+\varphi), \quad \frac{a\cos\psi}{b} = \cos(u-\psi) = \cos(\psi-u).$$

§ 21.

Un polygone est indéterminé lorsqu'on en connaît seulement les angles et les côtés sauf trois. Ceci est évident si les trois côtés inconnus se suivent; car alors on peut mener à l'un des côtés inconnus des droites parallèles qui rencontrent les deux autres côtés inconnus en des points variables, en sorte que les trois côtés inconnus auront une infinité de déterminations. Il s'ensuit que les trois côtés inconnus peuvent avoir aussi une infinité de déterminations différentes dans le cas où ils ne se suivent pas; car l'ordre des côtés étant arbitraire relativement à leur addition (§ 2), on peut toujours, en partant d'un polygone donné, en construire un autre dans lequel les côtés ont la même longueur et la même direction et n'ont de changé que leur ordre.

§ 22.

Soit dans un polygone *abcd* (fig. 2) l'un des côtés *ab*, compté de *a* à *b*, égal à l'unité absolue; soit le suivant *bc* compté de *b* à *c*, *cd* de *c* à *d*, *da* de *d* à *a*; désignons par les nombres pairs II, IV, VI, VIII les longueurs des côtés, et par les nombres impairs I, III, V, VII leurs déviations [comptées en degrés] par rapport au côté précédent prolongé, en regardant ces déviations comme positives ou négatives suivant qu'elles ont le même sens que le mouvement diurne du soleil ou le sens inverse.

Désignons encore par I', III', V', VII' les expressions

$$\cos\text{I} + \varepsilon\sin\text{I}, \quad \cos\text{III} + \varepsilon\sin\text{III}, \quad \cos\text{V} + \varepsilon\sin\text{V}, \quad \text{etc.}$$

et par $\text{I}^{-\prime}$, $\text{III}^{-\prime}$, $\text{V}^{-\prime}$, $\text{VII}^{-\prime}$ les expressions

$$\cos(-\text{I}) + \varepsilon\sin(-\text{I}), \quad \cos\text{III} - \varepsilon\sin\text{III}, \quad \cos\text{V} - \varepsilon\sin\text{V}, \quad \text{etc.}$$

Cela posé, en menant de a des droites parallèles à bc, cd, da, on verra que:

1° La première des parallèles dévie de iii degrés de ab; la seconde des parallèles dévie de $\mathrm{iii}+\mathrm{v}$ degrés de ab; et la troisième, ou bien le prolongement ae du dernier côté da, dévie de $\mathrm{iii}+\mathrm{v}+\mathrm{vii}$ ou $-\mathrm{i}$ degré de ab. Donc la totalité de tous les angles est égale à 0 et la mesure de leur somme est soit 0, soit $\mp$ 4 angles droits, soit un multiple de ce nombre.

2° $$\mathrm{ii}+\mathrm{iv}\cdot\mathrm{iii}'+\mathrm{vi}\cdot\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}'+\mathrm{viii}\cdot\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}'\cdot\mathrm{vii}' = 0;$$

car (§ 2)
$$ab+bc+cd+da = 0.$$
Or
$$ab = \mathrm{ii},\; bc = \mathrm{iv}\cdot\mathrm{iii}' \text{ (§ 9)},$$
$$cd = \mathrm{vi}\,[\cos(\mathrm{iii}+\mathrm{v})+\varepsilon\sin(\mathrm{iii}+\mathrm{v})]$$
d'après le § 9 et le précédent n° 1, ou bien, d'après le § 7,
$$cd = \mathrm{vi}\cdot\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}',$$
et de la même manière on démontre que
$$da = \mathrm{viii}\cdot\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}'\cdot\mathrm{vii}'.$$

3° $$\mathrm{ii}\cdot\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}'\cdot\mathrm{vii}'+\mathrm{iv}\cdot\mathrm{v}'\cdot\mathrm{vii}'+\mathrm{vi}\cdot\mathrm{vii}'+\mathrm{viii} = 0.$$
Car, en divisant par $\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}'\cdot\mathrm{vii}'$ les termes de l'équation précédente du n° 2, on obtiendra d'après le § 12
$$\mathrm{ii}\cdot\mathrm{iii}^{-\prime}\cdot\mathrm{v}^{-\prime}\cdot\mathrm{vii}^{-\prime}+\mathrm{iv}\cdot\mathrm{v}^{-\prime}\cdot\mathrm{vii}^{-\prime}+\mathrm{vi}\cdot\mathrm{vii}^{-\prime}+\mathrm{viii} = 0.$$
Or chaque terme de cette équation, excepté le dernier, est multiplié par une combinaison d'un cosinus et d'un sinus (le premier par exemple est égal à
$$\mathrm{ii}\,[\cos(\mathrm{iii}+\mathrm{v}+\mathrm{vii})-\varepsilon\sin(\mathrm{iii}+\mathrm{v}+\mathrm{vii})]);$$
la somme de tous les termes directs, ainsi que la somme des termes multipliés par un sinus, est égale à 0 (d'après le § 3). Donc la somme totale est égale à 0, même quand on change le signe de chaque sinus, et alors l'expression [l'équation] se transforme en celle qu'il fallait démontrer.

4° $$\mathrm{iii}'+\mathrm{iii}^{-\prime} = 2\cos\mathrm{iii},$$
$$\mathrm{iii}'\cdot\mathrm{v}'+\mathrm{iii}^{-\prime}\cdot\mathrm{v}^{-\prime} = 2\cos(\mathrm{iii}+\mathrm{v}),$$

$$\mathrm{III}' \cdot \mathrm{V}^{-\prime} + \mathrm{III}^{-\prime} \cdot \mathrm{V}' = 2 \cos (\mathrm{III} - \mathrm{V}) \,,$$
$$\mathrm{III}' - \mathrm{III}^{-\prime} = 2 \varepsilon \sin \mathrm{III} \,,$$
$$\mathrm{III}' \cdot \mathrm{V}' - \mathrm{III}^{-\prime} \cdot \mathrm{V}^{-\prime} = 2 \varepsilon \sin (\mathrm{III} + \mathrm{V}) \,,$$
$$\mathrm{III}' \cdot \mathrm{V}^{-\prime} - \mathrm{III}^{-\prime} \cdot \mathrm{V}' = 2 \varepsilon \sin (\mathrm{III} - \mathrm{V}) \,,$$
$$\frac{(\mathrm{III}')^2 - 1}{(\mathrm{III}')^2 + 1} = \varepsilon \operatorname{tg} \mathrm{III} = \frac{1 - (\mathrm{III}^{-\prime})^2}{1 + (\mathrm{III}^{-\prime})^2} \,,$$
$$\frac{(\mathrm{III}')^2 + 1}{(\mathrm{III}')^2 - 1} = - \varepsilon \cot \mathrm{III} = \frac{1 + (\mathrm{III}^{-\prime})^2}{1 - (\mathrm{III}^{-\prime})^2} \,.$$

L'exactitude de ces formules devient évidente, si l'on remplace III', $\mathrm{III}^{-\prime}$, V', $\mathrm{V}^{-\prime}$ par leurs valeurs

$$\cos \mathrm{III} + \varepsilon \sin \mathrm{III} \,, \quad \cos \mathrm{III} - \varepsilon \sin \mathrm{III} \,, \quad \cos \mathrm{V} + \varepsilon \sin \mathrm{V} \,, \text{ etc.}$$

§ 23.

Deux équations de la forme citée aux nos 2° et 3° du paragraphe précédent suffisent pour la résolution d'un polygone quelconque, lorsqu'il n'y a d'inconnus que trois angles, ou deux angles et un côté, ou un angle et deux côtés.

En effet dans le dernier cas l'angle inconnu aura le même sinus et le même cosinus que la somme des autres angles, avec des signes opposés (§ 22, 1°); dans les deux autres cas on éliminera l'un des angles inconnus en le prenant pour l'angle I des nos 2° et 3° du § 22. Alors les équations ne contiendront que deux inconnues. On peut donc trouver une inconnue en fonction de l'autre au moyen de l'une de ces équations. En portant cette fonction dans l'autre équation, on aura éliminé l'une des inconnues et par ce moyen on finit par trouver l'autre.

Soient par exemple I, III et VI les inconnues du polygone de la fig. 2 et cherchons III. Alors, d'après le § 22, 2° et 3°, on aura

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} \cdot \mathrm{III}' + \mathrm{VI} \cdot \mathrm{III}' \cdot \mathrm{V}' + \mathrm{VIII} \cdot \mathrm{III}' \cdot \mathrm{V}' \cdot \mathrm{VII}' = 0 \,,$$
$$\mathrm{II} \cdot \mathrm{III}' \cdot \mathrm{V}' \cdot \mathrm{VII}' + \mathrm{IV} \cdot \mathrm{V}' \cdot \mathrm{VII}' + \mathrm{VI} \cdot \mathrm{VII}' + \mathrm{VIII} = 0.$$

On déduit de la première équation

$$- \mathrm{II} \cdot \mathrm{III}^{-\prime} \cdot \mathrm{V}^{-\prime} - \mathrm{IV} \cdot \mathrm{V}^{-\prime} - \mathrm{VIII} \cdot \mathrm{VII}' = \mathrm{VI} \,,$$

et en portant cette valeur de $\textsc{vi}$ dans l'autre équation, après en avoir divisé les termes par $\textsc{vii}'$, on obtiendra

$$\textsc{ii}\cdot\textsc{iii}'\cdot\textsc{v}' - \textsc{ii}\cdot\textsc{iii}^{-\prime}\cdot\textsc{v}^{-\prime} + \textsc{iv}\cdot\textsc{v}' - \textsc{iv}\cdot\textsc{v}^{-\prime} + \textsc{viii}\cdot\textsc{vii}^{-\prime} - \textsc{viii}\cdot\textsc{vii}' = 0.$$

Donc, d'après le § 22, 4°,

$$\textsc{ii}\cdot\varepsilon\cdot 2\sin(\textsc{iii}+\textsc{v}) + \textsc{iv}\cdot\varepsilon\cdot 2\sin\textsc{v} - \textsc{viii}\cdot\varepsilon\cdot 2\sin\textsc{vii} = 0\,,$$

ou bien

$$\sin(\textsc{iii}+\textsc{v}) = \frac{\textsc{viii}\cdot\sin\textsc{vii} - \textsc{iv}\cdot\sin\textsc{v}}{\textsc{ii}}.$$

III.

Sur la représentation de la direction d'un rayon dans une sphère.

§ 24.

Supposons que dans une sphère deux rayons horizontaux fassent des angles droits et que tous deux soient perpendiculaires à un troisième rayon. Supposons encore que l'un des rayons horizontaux aille du centre à gauche et soit égal à r, que l'autre aille du centre en avant et soit égal à εr, que le rayon vertical aille du centre en haut et soit égal à ηr, et que les rayons diamétralement opposés soient $-r$, $-\varepsilon r$, $-\eta r$. La lettre r désigne la longueur du rayon; les unités ε et η sont toutes deux perpendiculaires au rayon $+1$ et, par rapport à celui-ci, η^2 et ε^2 seront toutes deux égales à -1 (§ 5).

§ 25.

Le plan déterminé par les quatre rayons r, $-r$, ηr, $-\eta r$ et le plan déterminé par r, $-r$, εr, $-\varepsilon r$ font un angle droit et coupent la sphère suivant deux grands cercles dont j'appelle celui qui passe par r et ηr le cercle vertical et celui qui passe par les rayons horizontaux r et εr l'horizon. Nous compterons les arcs du cercle vertical et ceux de ses parallèles à partir du point d'intersection à gauche avec l'horizon, positifs en haut, négatifs en bas. Les arcs horizontaux seront comptés à partir du cercle vertical, positifs dans le sens du mouvement du soleil et négatifs dans le sens inverse. Désignons par exemple l'horizon (fig. 3) par $ow\gamma hpi$, un cercle parallèle par $kfs\beta$, le cercle vertical par $ok\pi qnv$, les pôles de l'horizon par π et n, et ceux du cercle vertical par p et γ. Alors $co = r$, $ct = -r$, $c\gamma = \varepsilon r$, $cp = -\varepsilon r$, $c\pi = \eta r$, $cn = -\eta r$, $o\gamma = +90°$, $op = -90°$, $o\pi = +90°$, $on = -90°$; les arcs du cercle parallèle doivent être comptés à partir de k, positifs à gauche et négatifs à droite.

§ 26.

Menons un segment de droite cd du centre c de la sphère (fig. 3) à un point d du rayon commun aux plans de l'horizon et du cercle vertical; menons un autre segment de droite de du point extrême de cd parallèlement à l'axe πn de l'horizon, et enfin de l'extrémité de de un troisième segment de droite ef parallèle à l'axe $p\gamma$ du cercle vertical. Ces trois segments seront les coordonnées du point f où se termine ce dernier segment ef. Le premier cd est l'abscisse du point f et sera désigné par x; il a même direction soit que le rayon $+r$, soit que le rayon $-r$. Le second et le troisième segment, de et ef, sont les ordonnées du point f. Le second de représente la distance du point f au plan de l'horizon; il sera désigné par ηy, parce qu'il est parallèle à ηr ou à $-\eta r$. Le troisième ef est la distance du point f au plan du cercle vertical et nous le désignerons par εz, parce qu'il est parallèle au rayon εr ou à $-\varepsilon r$. Le troisième ef $(= \varepsilon z)$ fait un angle droit avec le second de $(= \eta y)$ et celui-ci, ηy, un angle droit avec le premier cd $(= x)$.

§ 27.

Un rayon dont le point extrême a pour coordonnées x, ηy, εz sera désigné par $x + \eta y + \varepsilon z$ (§ 2). On multiplie $x + \eta y$ par $a + \eta b$ et $x + \varepsilon z$ par $a + \varepsilon b$ de la même manière que $c + d\sqrt{-1}$ par $a + b\sqrt{-1}$; car les angles de direction de η et de ε étant comptés tous les deux à partir du même rayon $+1$ (§ 25), on aura, d'après le § 5, $\eta^2 = -1$ et $\varepsilon^2 = -1$, et par conséquent on trouve les produits $(x+\eta y)\cdot(a+\eta b)$ et $(x+\varepsilon z)\cdot(a+\varepsilon b)$ d'après la règle du § 10.

§ 28.

Supposons qu'un point avance ou recule d'un certain nombre de degrés fs ($=$ III) sur la circonférence d'un cercle horizontal βkfs (fig. 3), et que ses coordonnées soient égales à cd ($=x'$), de ($=\eta y'$) et ef ($=\varepsilon z'$). Alors l'ordonnée $\eta y'$ restera inaltérée, parce que le point reste toujours à la même distance de l'horizon; mais l'abscisse cd ($=ue$) ou x' devient ul ($=x''$), l'ordonnée ef ($=\varepsilon z'$) devient ls ($=\varepsilon z''$), et la somme des deux nouvelles coordonnées $ul+ls$ ($=x''+\varepsilon z''$) sera égale à $(x'+\varepsilon z')\cdot(\cos \text{III}+\varepsilon \sin \text{III})$. Désignons en effet par ρ le rayon uk, par I la mesure de l'angle kuf, en sorte que la mesure de l'angle kus devient égale à I $+$ III. Alors on aura, d'après le § 9, $ue+ef$ ($=x'+\varepsilon z'$) $=\rho(\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I})$; de même, d'après le § 8, $ul+ls$ ($=x''+\varepsilon z''$) $=\rho\,[\cos(\text{I}+\text{III})+\varepsilon \sin(\text{I}+\text{III})]=\rho(\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I})\cdot(\cos \text{III}+\varepsilon \sin \text{III})$; donc, si l'on remplace $\rho(\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I})$ par $x'+\varepsilon z'$, on aura $x''+\varepsilon z''=(x'+\varepsilon z')$ $.\,(\cos \text{III}+\varepsilon \sin \text{III})$.

§ 29.

Si un point décrit sur le cercle vertical ou sur un de ses parallèles un arc dont la mesure est égale à II, la somme de ses deux coordonnées initiales x' et $\eta y'$ deviendra égale à $(x'+\eta y')(\cos \text{II}+\eta \sin \text{II})$; mais la troisième coordonnée $\varepsilon z'$ reste inaltérée, parce que la distance au plan du cercle vertical ne peut changer tant que le point reste sur le cercle parallèle au cercle vertical. Du reste la démonstration est, d'après le § 27, tout à fait analogue à celle qui précède.

§ 30.

Si le rayon de la sphère a pour coordonnées [de son extrémité] x, ηy, εz, on le désignera, d'après le § 27, par $x+\eta y+\varepsilon z$. Mais si l'on change sa direction de manière que son extrémité se déplace de I degrés dans le sens horizontal, il deviendra (§ 28)

$$\eta y+(x+\varepsilon z)(\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I})=\eta y+x\cos \text{I}-z\sin \text{I}+\varepsilon x\sin \text{I}+\varepsilon z\cos \text{I}$$

et sera désigné par

$$(x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ (\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I}).$$

§ 31.

Si au contraire on change la direction du rayon $x+\eta y+\varepsilon z$ en déplaçant son extrémité de II degrés dans le sens vertical, il deviendra (§ 29)

$$\varepsilon z+(x+\eta y)\cdot(\cos \text{II}+\eta \sin \text{II}) = \varepsilon z + x \cos \text{II} - y \sin \text{II} + \eta x \sin \text{II} + \eta y \cos \text{II}$$

et sera désigné par

$$(x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ (\cos \text{II}+\varepsilon \sin \text{II}).$$

§ 32.

Il s'ensuit que

$$(x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ (\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I})\ ,,\ (\cos \text{III}+\varepsilon \sin \text{III})$$

est identique à

$$(x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ \big(\cos(\text{I}+\text{III})+\varepsilon \sin(\text{I}+\text{III})\big)\ ;$$

car, soit que l'extrémité du rayon $x+\eta y+\varepsilon z$ avance dans le sens horizontal d'abord de I degrés, puis de III degrés, soit qu'elle avance à la fois de l'arc entier I + III, on aura toujours le même rayon allant du centre c à l'extrémité de l'arc III. De même

$$(x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ (\cos \text{II}+\eta \sin \text{II})\ ,,\ (\cos \text{IV}+\eta \sin \text{IV})$$
$$= (x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ \big(\cos(\text{II}+\text{IV})+\eta \sin(\text{II}+\text{IV})\big).$$

Par conséquent

$$x+\eta y+\varepsilon z = (x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ (\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I})\ ,,\ (\cos \text{I}-\varepsilon \sin \text{I})$$
$$= (x+\eta y+\varepsilon z)\ ,,\ (\cos \text{II}+\eta \sin \text{II})\ ,,\ (\cos \text{II}-\eta \sin \text{II}).$$

§ 33.

Déplaçons un même point sur les parallèles à l'horizon et sur les parallèles au cercle vertical, en lui faisant décrire alternativement un arc horizontal et un arc vertical, et désignons les arcs décrits par I, II, III, IV, V, VI dans l'ordre où ils se suivent; représentons encore par s le rayon qui va du centre de la sphère à l'origine du premier arc (fig. 4) et par S le rayon qui va du centre à l'extrémité du dernier arc; désignons $\cos \text{I}+\varepsilon \sin \text{I}$ par I′, $\cos \text{II}+\eta \sin \text{II}$ par II′, $\cos \text{III}+\varepsilon \sin \text{III}$ par III′, etc.; $\cos \text{I}-\varepsilon \sin \text{I}$ par I⁻′,

$\cos \text{II} - \eta \sin \text{II}$ par $\text{II}^{-\prime}$, etc.; alors on aura d'après les §§ 30 et 31

$$S = s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}' \,,, \text{V}' \,,, \text{VI}'.$$

Dans le second membre de cette équation on peut supprimer les unités IV', V' VI' ou bien un nombre quelconque des derniers facteurs qui se suivent immédiatement, à condition d'écrire dans le premier membre de l'équation les quantités réciproques en ordre inverse et jointes par le signe (,,); c'est-à-dire que d'après le § 32 on peut poser

$$S \,,, \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime} \,,, \text{IV}^{-\prime} = s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}'$$

ou

$$s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' = S \,,, \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime} \,,, \text{IV}^{-\prime} \,,, \text{III}^{-\prime}, \text{ etc.}$$

§ 34.

Donc, en supposant $s = S$ et $s = \eta r$, on aura $s \,,, \text{I}' = \eta r$.

1° $s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' = r(\eta \cos \text{II} - \sin \text{II}) = S \,,, \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime} \,,, \text{IV}^{-\prime} \,,, \text{III}^{-\prime}$

$$= r \left\{ \begin{array}{lll} \text{c III} \cdot \text{c IV} \cdot \text{c V} \cdot \text{s VI} & + \eta \cdot \text{c IV} \cdot \text{c VI} & - \varepsilon \cdot \text{s III} \cdot \text{c IV} \cdot \text{c V} \cdot \text{s VI} \\ + \text{c III} \cdot \text{s IV} \cdot \text{c VI} & - \eta \cdot \text{s IV} \cdot \text{c V} \cdot \text{s VI} & - \varepsilon \cdot \text{s III} \cdot \text{s IV} \cdot \text{c VI} \\ - \text{s III} \cdot \text{s V} \cdot \text{s VI} & & - \varepsilon \cdot \text{c III} \cdot \text{s V} \cdot \text{s VI} \end{array} \right\}^{*)}.$$

2° $s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' = r(\eta \cdot \text{c II} - \text{s II} \cdot \text{c III} - \varepsilon \cdot \text{s II} \cdot \text{s III}) = S \,,, \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime} \,,, \text{IV}^{-\prime}$

$$= r \left\{ \begin{array}{ll} \text{c IV} \cdot \text{c V} \cdot \text{s VI} - \varepsilon \cdot \text{s V} \cdot \text{s VI} & + \eta \cdot \text{c IV} \cdot \text{c VI} \\ + \text{s IV} \cdot \text{c VI} & - \eta \cdot \text{s IV} \cdot \text{c V} \cdot \text{s VI} \end{array} \right\}.$$

3° $s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}'$

$$= r \left\{ \begin{array}{ll} \eta \cdot \text{c II} \cdot \text{c IV} & - \text{c II} \cdot \text{s IV} - \varepsilon \cdot \text{s II} \cdot \text{s III} \\ - \eta \cdot \text{s II} \cdot \text{c III} \cdot \text{s IV} & - \text{s II} \cdot \text{c III} \cdot \text{c IV} \end{array} \right\}$$

$$= S \,,, \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime} = r \cdot (\text{c V} \cdot \text{s VI} - \varepsilon \cdot \text{s V} \cdot \text{s VI} + \eta \cdot \text{c VI}).$$

4° $s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}' \,,, \text{V}'$

$$= r \left\{ \begin{array}{lll} \eta \cdot \text{c II} \cdot \text{c IV} & - \text{c II} \cdot \text{s IV} \cdot \text{c V} & - \varepsilon \cdot \text{c II} \cdot \text{s IV} \cdot \text{s V} \\ - \eta \cdot \text{s II} \cdot \text{c III} \cdot \text{s IV} & - \text{s II} \cdot \text{c III} \cdot \text{c IV} \cdot \text{c V} & - \varepsilon . \text{s II} \cdot \text{c III} \cdot \text{c IV} \cdot \text{s V} \\ & + \text{s II} \cdot \text{s III} \cdot \text{s V} & - \varepsilon \cdot \text{s II} \cdot \text{s III} \cdot \text{c V} \end{array} \right\}$$

$$= S \,,, \text{VI}^{-\prime} = r(\eta \cdot \text{c VI} + \text{s VI}).$$

---

*) [L'auteur désigne ici *cos* par c et *sin* par s.]

§ 35.

En posant $s = S = \varepsilon r$, on aura les équations suivantes:

1° $$s\,,,\,\mathrm{I}' = r(\varepsilon\cdot \mathrm{c\,I} - \mathrm{s\,I}) = S\,,,\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{IV}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{III}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{II}^{-\prime}$$
$$= r\left\{\begin{array}{lll} \varepsilon\cdot\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{c\,V} & +\,\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{c\,V} & -\,\eta\cdot\mathrm{s\,II}\cdot\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{c\,V} \\ -\,\varepsilon\cdot\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{c\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} & +\,\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{c\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} & -\,\eta\cdot\mathrm{s\,II}\cdot\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{c\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} \\ & -\,\mathrm{s\,II}\cdot\mathrm{s\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} & -\,\eta\cdot\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{s\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} \end{array}\right\}.$$

2° $$s\,,,\,\mathrm{I}'\,,,\,\mathrm{II}' = r(-\,\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{c\,II} - \eta\cdot\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{s\,II} + \varepsilon\cdot\mathrm{c\,I})$$
$$= S\,,,\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{IV}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{III}^{-\prime}$$
$$= \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon\cdot\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{c\,V} - \eta\cdot\mathrm{s\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} & +\,\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{c\,IV} \\ -\,\varepsilon\cdot\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{c\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} & +\,\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{c\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} \end{array}\right\}.$$

3° $$s\,,,\,\mathrm{I}'\,,,\,\mathrm{II}'\,,,\,\mathrm{III}' = r\left\{\begin{array}{lll} -\,\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{c\,III} & -\,\varepsilon\cdot\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{s\,III} & -\,\eta\cdot\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{s\,II} \\ -\,\mathrm{c\,I}\cdot\mathrm{s\,III} & +\,\varepsilon\cdot\mathrm{c\,I}\cdot\mathrm{c\,III} & \end{array}\right\}$$
$$= S\,,,\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{V}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{IV}^{-\prime} = r(\varepsilon\cdot\mathrm{c\,V} + \mathrm{c\,IV}\cdot\mathrm{s\,V} - \eta.\mathrm{s\,IV}.\mathrm{s\,V}).$$

4° $$s\,,,\,\mathrm{I}'\,,,\,\mathrm{II}'\,,,\,\mathrm{III}'\,,,\,\mathrm{IV}' = r\left\{\begin{array}{lll} \varepsilon\cdot\mathrm{c\,I}\cdot\mathrm{c\,III} & -\,\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{c\,IV} & -\,\eta\cdot\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{s\,II}\cdot\mathrm{c\,IV} \\ -\,\varepsilon\cdot\mathrm{s\,I}.\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{s\,III} & -\,\mathrm{c\,I}\cdot\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{c\,IV} & -\,\eta\cdot\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{c\,II}\cdot\mathrm{c\,III}\cdot\mathrm{s\,IV} \\ & +\,\mathrm{s\,I}\cdot\mathrm{s\,II}\cdot\mathrm{s\,IV} & -\,\eta\cdot\mathrm{c\,I}\cdot\mathrm{s\,III}\cdot\mathrm{s\,IV} \end{array}\right\}$$
$$= S\,,,\,\mathrm{VI}^{-\prime}\,,,\,\mathrm{V}^{-\prime} = r(\varepsilon\cdot\mathrm{c\,V} + \mathrm{s\,V}).$$

IV.

Sur la résolution des polygones sphériques.

§ 36.

Un polygone sphérique est la figure qu'on obtient en joignant sur la surface d'une sphère plus de deux arcs de grand cercle de manière que chacun des arcs successifs commence au point où se termine le précédent et que le dernier des arcs se termine où le premier commence. Les côtés du polygone sont les arcs de grand cercle dont il se compose; les angles sont mesurés par les degrés que le plan de chacun des côtés fait avec le plan du prolongement du côté précédent. Le rayon étant supposé égal à 1, nous désignerons les côtés et les angles du polygone dans l'ordre où ils se suivent par I, II, III, IV, V, VI, etc. (fig. 5). Les angles seront désignés par les nombres impairs et les côtés par les nombres pairs; par exemple, le côté entre I et III sera désigné par II, et l'angle qui mesure la déviation du côté IV par rapport au prolongement de II sera désigné par III.

§ 37.

Supposons que les angles et les côtés d'un polygone soient connus à l'exception soit d'un angle et de deux côtés, soit de deux angles et d'un côté, soit de trois côtés, soit enfin de trois angles. Alors on déterminera les inconnues par l'équation suivante

$$s\,,,\,\mathrm{I}'\,,,\,\mathrm{II}'\,,,\,\mathrm{III}'\,,,\,\mathrm{IV}'\,,,\,\mathrm{V}'\,,,\,\mathrm{VI}'\,,,\,\ldots\,,,\,N' = s\,,$$

dans laquelle s désigne une quantité indéterminée; on peut la supposer égale au rayon r commun au cercle vertical et au cercle horizontal, ou égale au rayon horizontal εr qui est perpendiculaire à r, ou enfin égale à ηr, qui est le rayon vertical et perpendiculaire à r et à εr.

D'après le § 27, ε^2 et η^2 sont tous deux égaux à -1. On a encore

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}' &= \cos\mathrm{I} + \varepsilon\sin\mathrm{I},\\
\mathrm{II}' &= \cos\mathrm{II} + \eta\sin\mathrm{II},\\
\mathrm{III}' &= \cos\mathrm{III} + \varepsilon\sin\mathrm{III},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N' &= \cos N + \eta\sin N,\\
\mathrm{I}^{-\prime} &= \frac{1}{\cos\mathrm{I} + \varepsilon\sin\mathrm{I}},\\
\mathrm{II}^{-\prime} &= \frac{1}{\cos\mathrm{II} + \eta\sin\mathrm{II}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le signe (,,), qui unit s, I′, II′, etc., indique qu'il faut d'abord multiplier s par I′, puis s ,, I′ par II′, puis s ,, I′ ,, II′, par III′, etc., avec cette seule restriction qu'on ne change pas celui des termes du multiplicande qui représente un segment [ηb ou εc] qui n'est pas dans le plan déterminé par l'arc de cercle indiqué par le symbole [ε ou η] du multiplicateur. Ainsi

$$\eta \;,,\; (\cos \text{I} + \varepsilon \sin \text{I}) = \eta,$$

$$\varepsilon \;,,\; (\cos \text{II} + \eta \sin \text{II}) = \varepsilon,$$

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \;,,\; (\cos \text{III} + \varepsilon \sin \text{III}) = \eta y + (x + \varepsilon z)(\cos \text{III} + \varepsilon \sin \text{III}),$$

comme on l'a déjà vu dans les §§ 28—32.

Nous allons voir maintenant comment l'équation

$$s \;,,\; \text{I}' \;,,\; \text{II}' \;,,\; \text{III}' \;,,\; \text{IV}' \;,,\; \ldots \;,,\; N' = s$$

peut servir à la résolution d'un polygone sphérique.

Supposons que la sphère $qhvw$ (fig. 6) puisse tourner autour du diamètre πcn qui joint les pôles du grand cercle horizontal $hpow$ et autour du diamètre $pc\gamma$ qui joint les pôles du grand cercle vertical $q\pi ov$, sans que la position de ces deux grands cercles en soit altérée.

1° Plaçons la sphère de façon que l'extrémité du dernier côté du polygone I II III IV V VI tombe au pôle π de l'horizon et que le prolongement du même côté tombe dans le quadrant πo du cercle vertical (fig. 6).

2° Faisons ensuite tourner la sphère de I degrés autour de l'axe de l'horizon πcn. Alors le côté II tombera sur le cercle vertical entre π et o, comme le montre la fig. 7.

3° Si l'on soumet ensuite la sphère à une rotation de II degrés autour de l'axe $pc\gamma$ du cercle vertical, tous les points du côté II passeront successivement par le pôle π de l'horizon, et la sphère aura la position représentée dans la fig. 8.

4° Si on la fait tourner de nouveau de III degrés autour de l'axe de l'horizon, le côté IV viendra se placer sur le cercle vertical entre o et π (fig. 9).

5° Continuons à faire tourner la sphère de IV degrés verticaux, de V degrés horizontaux, de VI degrés verticaux, etc. Elle finira par reprendre la même position qu'elle avait d'abord au n° 1 (fig. 6).

En soumettant la sphère alternativement à des rotations autour de l'axe de l'horizon et de l'axe du cercle vertical, chaque point de la sphère décrira d'abord un arc horizontal qui mesure le premier angle du polygone, puis un arc vertical qui mesure autant de degrés qu'en a le premier côté du polygone, puis de nouveau un arc horizontal qui mesure le second angle, etc. La sphère finira par revenir à sa première position, et chacun de ses points sera revenu à son point de départ après avoir décrit autant d'arcs horizontaux que le polygone a d'angles et autant d'arcs verticaux qu'il a de côtés.

6° Par conséquent, si le nombre total des angles et des côtés du polygone est égal à N, et si un point quelconque de la sphère dans sa première position (fig. 6) avait pour coordonnées les trois segments dont la somme est égale à $x + \eta y + \varepsilon z$ $(= s)$, on aura, d'après le § 33,

$$s = s \,,,\, \text{I}' \,,,\, \text{II}' \,,,\, \text{III}' \,,,\, \text{IV}' \,,,\, \ldots \,,,\, N'.$$

Il faut encore remarquer que:

a) Le point fixe p a, pendant les rotations de la sphère, décrit sur sa surface un polygone dont le premier côté est égal à l'angle I, l'angle suivant au côté II, le côté suivant à l'angle III, etc. Car si l'on fait tourner la sphère autour de l'axe de l'horizon de manière que sa surface glisse sur le point fixe p, ce point décrira sur la surface de la sphère les côtés de ce polygone, tandis que l'inclinaison de chaque côté sur le prolongement du côté suivant prend naissance par les rotations autour de l'axe du cercle vertical. Il n'est pas très difficile de se figurer ceci, bien qu'on ait omis le polygone sur les figures 6, 7, etc., de peur que l'une des droites ne tombât sur l'autre, ce qui eût rendu les choses obscures.

b) Le point fixe o [fig. 6] a décrit un autre polygone, dont les angles sont égaux soit à $-90°$, soit à $+90°$; les côtés sont I, II, III, IV, ..., N, et l'équation du polygone est

$$s \,,,\, \text{I}' \,,,\, (-\varepsilon) \,,,\, \text{II}' \,,,\, \varepsilon \,,,\, \text{III}' \,,,\, (-\varepsilon) \,,,\, \text{IV}' \,,,\, \varepsilon \,,,\, \ldots \,,,\, (-\varepsilon) \,,,\, N' \,,,\, \varepsilon = s.$$

Ceci suffira, puisque nous ne nous servirons pas de cette équation dans ce qui suit. Revenons maintenant à celle de nos formules qui a servi de base à toutes les autres, savoir

7° $$s \,,,\, \text{I}' \,,,\, \text{II}' \,,,\, \text{III}' \,,,\, \text{IV}' \,,,\, \ldots \,,,\, N' = s.$$

Cette formule peut être transformée de beaucoup de manières; en effet, s étant la somme des coordonnées d'un point quelconque, on peut remplacer le segment s par un segment arbitraire, par exemple par ε, η, ηr ou εr.

8° Dans le premier membre de la formule on peut prendre pour première unité une quelconque de celles qui suivent s, quand on prend la suivante pour seconde unité, celle qui vient ensuite pour troisième unité, etc., la précédente [par rapport à la première] pour dernière unité, celle qui précède celle-ci pour avant-dernière, etc. Supposons par exemple que le premier membre commence par $s \,,, \text{III}$. Alors la fig. 8 représentera la première position de la sphère, la fig. 9 la deuxième, la fig. 7 l'avant-dernière et la fig. 8 la dernière. On voit ainsi, d'après le § 33 et de la même manière qu'auparavant, que l'équation deviendra

$$s \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}' \,,, \text{V}' \,,, \ldots . N' \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' = s.$$

9° Les deux transformations de l'équation $s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' \,,, \ldots \,,, N' = s$ qu'on vient d'indiquer offrent cet avantage, qu'on peut éliminer celle des unités $\text{I}', \text{II}', \text{II}', \text{III}', \ldots N'$ qu'on veut. Si, par exemple, on veut éliminer III', on transformera l'équation en

$$s \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}' \,,, \text{V}' \,,, \ldots . \,,, N' \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' = s;$$

puis on posera $s = \eta r$; alors, d'après le § 28, on aura $s \,,, \text{III}' = \eta r$. Veut-on éliminer IV', on transformera l'équation en

$$s \,,, \text{IV}' \,,, \text{V}' \,,, \ldots . \,,, N' \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' = s,$$

puis on posera $s = \varepsilon r$; alors, d'après le § 29, on aura $s \,,, \text{IV}' = \varepsilon r$.

10° Puisque

$$s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \ldots . \,,, N' = s,$$

on aura (§ 33)

$$s \,,, N^{-\prime} \,,, \ldots . \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime} = s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}'.$$

On peut donc toujours faire disparaître du premier membre de l'équation autant des dernières unités qu'on veut, à condition d'écrire au second membre les quantités réciproques des unités enlevées, prises en sens inverse et réunies entre elles et au second membre par le signe (,,).

11° Par ce moyen on peut faire en sorte que telle unité qu'on désire devienne la dernière, et par conséquent on peut former une équation dans laquelle cette unité ne se trouve pas. Supposons par exemple que le premier membre de l'équation

$$s \,,, \text{I}' \,,, \text{II}' \,,, \text{III}' \,,, \text{IV}' = s \,,, N^{-\prime} \,,, \ldots . \text{VI}^{-\prime} \,,, \text{V}^{-\prime}$$

soit égal à $x + \eta y + \varepsilon z$, et le second à $\mathfrak{x} + \eta \mathfrak{y} + \varepsilon \mathfrak{z}$: alors, d'après le § 3, on aura $\varepsilon z = \varepsilon \mathfrak{z}$, équation indépendante du facteur IV'; car $\text{IV}' = \cos \text{IV} + \eta \sin \text{IV}$, et par conséquent εz n'a pas changé par l'introduction du facteur IV' au premier membre (§ 29).

12° L'équation qu'on trouve pour déterminer l'inconnue cherchée u après avoir éliminé de la manière indiquée les deux autres inconnues qu'on ne cherche pas, a la forme

$$a = b \cos u + c \sin u.$$

On voit, en effet, sans difficulté que l'équation ne peut contenir ni le terme $\cos u \sin u$, ni des puissances de $\cos u$ et de $\sin u$. Pour résoudre cette équation, on pose $\frac{b}{c} = \cot \psi$ et $\cos(u - \psi) = \frac{a \sin \psi}{c} = \frac{a \cos \psi}{b}$, comme on l'a montré plus haut (§ 20).

13° Si le rayon r de la sphère devient infiniment grand et si les côtés du polygone sphérique deviennent des parties infiniment petites de circonférence de grand cercle, le polygone sphérique se transformera en un polygone plan, dont les côtés sont égaux aux produits des sinus des côtés du polygone sphérique par le rayon de la sphère. La résolution embrasse donc à la fois les polygones sphériques et les polygones plans.

V.

Je vais essayer maintenant de déduire d'une seule équation (§ 37, n° 6):

Les propriétés principales des triangles sphériques.

---

§ 38.

L'équation du triangle étant (§ 37, n° 6) $s\,,,\,\mathrm{I}'\,,,\,\mathrm{II}'\,,,\,\ldots\,,,\,\mathrm{VI}' = s$, comme il est indifférent de commencer par un terme ou par un autre (§ 37, n° 8), on pourra commencer par I', III' ou V', si l'on suppose que la première des unités soit dans le plan de l'horizon, c'est-à-dire de la forme $\cos + \varepsilon \sin$. Je désigne alors les segments de la série qui suivent VI' par VII', VIII', IX', X', XI', etc., en sorte que

I′, VII′, XIII′ deviennent synonymes, et de même II′, VIII′, XIV′, etc. Cette manière de compter ne peut pas produire de confusion: pour connaître le numéro du segment en comptant seulement jusqu'à VI, il faut soustraire VI autant de fois que possible des numéros qui dépassent ce nombre.

Ensuite je désignerai par $(n+\text{I})'$ le cos + ε sin relatif à l'angle par lequel commence la série; n est indéterminé, seulement il doit désigner 0 ou un nombre pair. Alors l'équation généralisée du triangle devient, par suite de cette notation et d'après le § 37, n° 8,

$$s \,,, (n+\text{I})' \,,, (n+\text{II})' \,,, (n+\text{III})' \,,, (n+\text{IV})' \,,, (n+\text{V})' \,,, (n+\text{VI})' = s.$$

En transformant cette équation d'après le § 33 en

$$\varepsilon \,,, (n+\text{I})' \,,, (n+\text{II})' = \varepsilon \,,, (n+\text{VI})^{-\prime} \,,, (n+\text{V})^{-\prime} \,,, (n+\text{IV})^{-\prime} \,,, (n+\text{III})^{-\prime},$$

on trouvera, d'après le § 35, n° 2, et le § 3,

1° $\cos(n+\text{I}) = \cos(n+\text{III})\cos(n+\text{V}) - \sin(n+\text{III})\cos(n+\text{IV})\sin(n+\text{V})$;

2° $\sin(n+\text{I}) = \dfrac{\sin(n+\text{IV})\sin(n+\text{V})}{\sin(n+\text{II})}$.

Si on la transforme en

$$\varepsilon \,,, (n+\text{I})' \,,, (n+\text{II})' \,,, (n+\text{III})' \,,, (n+\text{IV})' = \varepsilon \,,, (n+\text{VI})^{-\prime} \,,, (n+\text{V})^{-\prime},$$

il en résultera une équation analogue à celle du § 35, n° 4, avec la seule différence qu'on a ajouté n aux nombres I, II, III, etc., et supposé $r = \text{I}$. Donc, en divisant par $\sin(n+\text{I})$ les termes de cette équation qui contiennent η, on obtiendra

3° $-\cot(n+\text{I}) = \dfrac{\cot(n+\text{IV})\sin(n+\text{II})}{\sin(n+\text{III})} + \cot(n+\text{III})\cos(n+\text{II})$.

Si on la transforme en

$$\eta \,,, (n+\text{I})' \,,, (n+\text{II})' \,,, (n+\text{III})' = \eta \,,, (n+\text{VI})^{-\prime} \,,, (n+\text{V})^{-\prime} \,,, (n+\text{IV})^{-\prime},$$

on obtiendra, d'après le 34, n° 2:

4° $\cos(n+\text{II}) = \cos(n+\text{IV})\cos(n+\text{VI}) - \sin(n+\text{IV})\cos(n+\text{V})\sin(n+\text{VI})$;

5° $\sin(n+\text{II}) = \dfrac{\sin(n+\text{V})\sin(n+\text{VI})}{\sin(n+\text{III})}$.

Enfin, si on la transforme en

$$\eta\,,,\,(n+\text{I})'\,,,\,(n+\text{II})'\,,,\,(n+\text{III})'\,,,\,(n+\text{IV})'\,,,\,(n+\text{V})' = \eta\,,,\,(n+\text{VI})^{-\prime}$$

le terme contenant ε donnera d'après le § 34, n° 4:

$$6^{\circ} \qquad -\cot(n+\text{II}) = \frac{\cot(n+\text{V})\sin(n+\text{III})}{\sin(n+\text{IV})} + \cot(n+\text{IV})\cos(n+\text{III}).$$

§ 39.

On a supposé dans les six équations précédentes que n désigne zéro ou un nombre quelconque pair et positif. Or, en comparant les trois premières aux trois dernières, on trouvera que dans les trois premières on peut substituer à n le nombre $n+\text{I}$ ou bien un nombre quelconque positif et impair. Donc dans les trois premières équations n peut désigner zéro ou un nombre quelconque entier et positif. On peut aussi substituer à n la somme de n et d'un nombre quelconque entier et positif. On peut par exemple substituer à n chacun des nombres: $0+3$, $1+3$, $2+3$, $3+3$, $4+3$, etc., par conséquent $n+3$. Il en résultera que l'équation 3° du § 38 se transformera en

$$-\cot(n+\text{IV}) = \frac{\cot(n+\text{VII})\sin(n+\text{V})}{\sin(n+\text{VI})} + \cot(n+\text{VI})\cos(n+\text{V})$$

quand on y substituera $n+\text{III}$ à n.

On aura donc

$$-\cot(n+\text{I}) = \frac{\cot(n+\text{IV})\sin(n+\text{VI})}{\sin(n+\text{V})} + \cot(n+\text{V})\cos(n+\text{VI}).$$

La comparaison de cette équation avec l'équation 3° du § 38 donne cette double expression de $-\cot(n+\text{I})$:

$$1^{\circ} \qquad -\cot(n+\text{I}) = \frac{\cot(n+\text{IV})\sin\begin{Bmatrix} n+\text{II} \\ n+\text{VI} \end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix} n+\text{III} \\ n+\text{V} \end{Bmatrix}} + \cot\begin{Bmatrix} n+\text{III} \\ n+\text{V} \end{Bmatrix}\cos\begin{Bmatrix} n+\text{II} \\ n+\text{VI} \end{Bmatrix}.$$

D'après cette formule, $-\cot(n+\text{I})$ a la même valeur, soit qu'on prenne les nombres supérieurs [dans les parenthèses], soit qu'on prenne les nombres inférieurs.

De même on obtiendra, en substituant $n + \text{II}$ à n dans l'équation 2° du § 38,

$$\sin(n + \text{III}) = \frac{\sin(n + \text{VI}) \sin(n + \text{I})}{\sin(n + \text{IV})}$$

ou bien

$$\sin(n + \text{I}) = \frac{\sin(n + \text{III}) \sin(n + \text{IV})}{\sin(n + \text{VI})}.$$

De cette équation et de l'équation 2° du § 38 résulte:

2° $$\sin(n + \text{I}) = \frac{\sin(n + \text{IV}) \sin\left\{\begin{matrix} n + \text{III} \\ n + \text{V} \end{matrix}\right\}}{\sin\left\{\begin{matrix} n + \text{VI} \\ n + \text{II} \end{matrix}\right\}}.$$

Enfin, si l'on substitue $n + \text{III}$ à n dans l'équation 1° du § 38, on obtiendra:

3° $$\cos(n + \text{I}) = \frac{\cos(n + \text{VI}) \cos(n + \text{II}) - \cos(n + \text{IV})}{\sin(n + \text{VI}) \sin(n + \text{II})}.$$

§ 40.

Par la même substitution on conclut de la même équation

$$\cos(n + \text{IV}) = \cos(n + \text{VI}) \cos(n + \text{II}) - \sin(n + \text{VI}) \cos(n + \text{I}) \sin(n + \text{II})$$

ou bien

$$-\cos(n + \text{IV}) + \frac{\cos(n + \text{VI}) \cos(n + \text{II})}{\sin(n + \text{IV})} \sin(n + \text{IV}) = \sin(n + \text{VI}) \sin(n + \text{II}) \cos(n + \text{I}).$$

Donc, en appelant a le second membre de cette équation et en posant $\cos(n + \text{IV}) = \cos u$, $-1 = b$ et $\dfrac{\cos(n + \text{VI}) \cos(n + \text{II})}{\sin(n + \text{IV})} = c$, on aura, d'après le § 20,

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\cos(n + \text{VI}) \cos(n + \text{II})}{\sin(n + \text{IV})}$$

et

$$\cos(n + \text{I}) = -\frac{\cos[(n + \text{IV}) - \psi]}{\cos\psi \sin(n + \text{VI}) \sin(n + \text{II})}.$$

§ 41.

L'équation 1° du § 38 était

$$\overbrace{\underbrace{\cos(n+\text{I})}_{a}}^{a} = \underbrace{\cos\overbrace{(n+\text{III})}^{u}}_{b}\,\overbrace{\cos\underbrace{(n+\text{V})}_{u}}^{b} - \underbrace{\sin\overbrace{(n+\text{III})}^{u}\cos(n+\text{IV})}_{c}\,\sin\underbrace{(n+\text{V})}_{u}.$$

En désignant les termes de cette équation par les lettres a, b, c, u écrites au-dessous et au-dessus de chacun d'eux, on aura, pour déterminer $\cos(n+\text{I})$, les expressions suivantes (§ 20)

$$-\cos(n+\text{IV})\operatorname{tg}\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix} = \cot\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

et

$$\cos(n+\text{I}) = \frac{\sin\begin{Bmatrix} (n+\text{III})+\varphi' \\ (n+\text{V})+\varphi \end{Bmatrix}\cos\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix}}.$$

§ 42.

D'après l'équation 1° du § 39, on a

$$-\cot(n+\text{I}) = \frac{\cot(n+\text{IV})\sin\begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{II} \end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix}} + \cot\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix}\cos\begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{II} \end{Bmatrix}.$$

En posant

$$-\cot(n+\text{I}) = a,\quad \frac{\cot(n+\text{IV})}{\sin\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix}} = c,\quad \begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{II} \end{Bmatrix} = u,\quad \cot\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix} = b,$$

et en comparant l'équation avec celle du § 20, on reconnaîtra aisément l'exactitude des formules suivantes

$$\operatorname{tg}\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix} = \operatorname{tg}(n+\text{IV})\cos\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix},$$

$$-\cot(n+\text{I}) = \frac{\sin\begin{Bmatrix} (n+\text{VI})+\varphi' \\ (n+\text{II})+\varphi \end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix}}\cot\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix}.$$

§ 43.

En substituant dans les deux dernières équations du § 41 $n+\textsc{ii}$ à n, on aura

$$\cot\varphi = -\cos(n+\textsc{vi})\operatorname{tg}(n+\textsc{v}),$$

et

$$\sin[(n+\textsc{i})+\varphi] = \frac{\cos(n+\textsc{iii})\sin\varphi}{\cos(n+\textsc{v})}.$$

Mais en substituant $n+\textsc{iv}$ à n, on aura

$$\cot\varphi' = -\cos(n+\textsc{ii})\operatorname{tg}(n+\textsc{iii}),$$

et

$$\sin[(n+\textsc{i})+\varphi'] = \frac{\cos(n+\textsc{v})\sin\varphi'}{\cos(n+\textsc{iii})}.$$

Donc

$$\sin\begin{Bmatrix}(n+\textsc{i})+\varphi'\\(n+\textsc{i})+\varphi\end{Bmatrix} = \frac{\cos\begin{Bmatrix}n+\textsc{v}\\n+\textsc{iii}\end{Bmatrix}}{\cos\begin{Bmatrix}n+\textsc{iii}\\n+\textsc{v}\end{Bmatrix}}\cdot\sin\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix}$$

et

$$\cot\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix} = -\cos\begin{Bmatrix}n+\textsc{ii}\\n+\textsc{vi}\end{Bmatrix}\cdot\operatorname{tg}\begin{Bmatrix}n+\textsc{iii}\\n+\textsc{v}\end{Bmatrix}.$$

§ 44.

En substituant $n+\textsc{v}$ à n dans les deux dernières équations du § 42, on obtiendra

$$\sin[(n+\textsc{i})+\varphi] = -\cot(n+\textsc{vi})\operatorname{tg}(n+\textsc{ii})\sin\varphi$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(n+\textsc{iii})\cos(n+\textsc{ii}).$$

Mais en substituant $n+\textsc{i}$ à n:

$$\sin[(n+\textsc{i})+\varphi'] = -\cot(n+\textsc{ii})\operatorname{tg}(n+\textsc{vi})\sin\varphi'$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}(n+\textsc{v})\cdot\cos(n+\textsc{vi}).$$

Il en résulte

$$\sin\begin{Bmatrix}(n+\textsc{i})+\varphi'\\(n+\textsc{i})+\varphi\end{Bmatrix} = -\cot\begin{Bmatrix}n+\textsc{ii}\\n+\textsc{vi}\end{Bmatrix}\cdot\operatorname{tg}\begin{Bmatrix}n+\textsc{vi}\\n+\textsc{ii}\end{Bmatrix}\cdot\sin\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix}$$

et

$$\operatorname{tg}\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix} = \operatorname{tg}\begin{Bmatrix}n+\textsc{v}\\n+\textsc{iii}\end{Bmatrix}\cdot\cos\begin{Bmatrix}n+\textsc{vi}\\n+\textsc{ii}\end{Bmatrix}.$$

§ 45.

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I})$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}[(n+\mathrm{II}) + (n+\mathrm{IV}) + (n+\mathrm{VI})] \cdot \sin \frac{1}{2}[(n+\mathrm{II}) + (n+\mathrm{VI}) - (n+\mathrm{IV})]}{\sin(n+\mathrm{II}) \sin(n+\mathrm{VI})}.$$

En effet, on a d'après le § 39, n° 3,

$$\cos(n+\mathrm{I}) = \frac{\cos(n+\mathrm{VI})\cos(n+\mathrm{II}) - \cos(n+\mathrm{IV})}{\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{II})}$$

et d'après le § 19, e

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = 1 - \cos(n+\mathrm{I}).$$

Donc

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = 1 - \frac{\cos(n+\mathrm{VI})\cos(n+\mathrm{II}) - \cos(n+\mathrm{IV})}{\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{II})},$$

ou bien

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{II}) - \cos(n+\mathrm{VI})\cos(n+\mathrm{II}) + \cos(n+\mathrm{IV})}{\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{II})},$$

ou d'après le § 19, b

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\cos(n+\mathrm{IV}) - \cos[(n+\mathrm{VI}) + (n+\mathrm{II})]}{\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{II})},$$

et puisque (§ 19, i)

$$\cos b - \cos a = 2\sin \tfrac{1}{2}(a+b)\sin \tfrac{1}{2}(a-b),$$

on aura

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I})$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV}) + (n+\mathrm{VI}) + (n+\mathrm{II})] \sin \frac{1}{2}[(n+\mathrm{VI}) + (n+\mathrm{II}) - (n+\mathrm{IV})]}{\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{II})}.$$

§ 46.

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I})$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV}) + (n+\mathrm{II}) - (n+\mathrm{VI})] \sin \frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV}) - (n+\mathrm{II}) + (n+\mathrm{VI})]}{\sin(n+\mathrm{II})\sin(n+\mathrm{VI})}.$$

En effet, d'après le § 19, d, on a

$$1 + \cos(n+\mathrm{I}) = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}),$$

et d'après l'équation 3° du § 39, on a

$$1 + \cos(n+\mathrm{I}) = \frac{\sin(n+\mathrm{II})\sin(n+\mathrm{VI}) + \cos(n+\mathrm{II})\cos(n+\mathrm{VI}) - \cos(n+\mathrm{IV})}{\sin(n+\mathrm{II})\sin(n+\mathrm{VI})}.$$

Donc (§ 19, b)

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I}) = \frac{\cos[(n+\mathrm{II})-(n+\mathrm{VI})]-\cos(n+\mathrm{IV})}{\sin(n+\mathrm{II})\cdot\sin(n+\mathrm{VI})}.$$

Par conséquent, comme (§ 19, i)

$$\cos b - \cos a = 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b),$$

on aura

$$\cos^2\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{I})$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{II})+(n+\mathrm{VI})]}{\sin(n+\mathrm{II})\sin(n+\mathrm{VI})}.$$

§ 47.

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{I})-(n+\mathrm{III})] = \frac{\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]}{\sin\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{V})$$

et

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\mathrm{I})+(n+\mathrm{III})] = \frac{\cos\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})-(n+\mathrm{VI})]}{\cos\frac{1}{2}[(n+\mathrm{IV})+(n+\mathrm{VI})]}\cdot\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\mathrm{V}),$$

ce qu'on démontre de la manière suivante:

1° En ajoutant et retranchant $\sin(n+\mathrm{I})$, on transforme l'équation [qui précède l'équation] 2° du § 39

$$\sin(n+\mathrm{III}) = \frac{\sin(n+\mathrm{I})\sin(n+\mathrm{VI})}{\sin(n+\mathrm{IV})}$$

en les deux suivantes

$$\sin(n+\mathrm{I})-\sin(n+\mathrm{III}) = \frac{\sin(n+\mathrm{I})\sin(n+\mathrm{IV})-\sin(n+\mathrm{I})\sin(n+\mathrm{VI})}{\sin(n+\mathrm{IV})}, \quad \text{(a)}$$

$$\sin(n+\mathrm{I})+\sin(n+\mathrm{III}) = \frac{\sin(n+\mathrm{I})\sin(n+\mathrm{IV})+\sin(n+\mathrm{I})\sin(n+\mathrm{VI})}{\sin(n+\mathrm{IV})}. \quad \text{(b)}$$

En substituant $n+\mathrm{II}$ à n dans l'équation 1° du § 39, on obtiendra

$$-\cot(n+\mathrm{III}) = \frac{\cos(n+\mathrm{IV})\cos(n+\mathrm{V})}{\sin(n+\mathrm{V})} + \frac{\sin(n+\mathrm{IV})\cos(n+\mathrm{VI})}{\sin(n+\mathrm{V})\sin(n+\mathrm{VI})}.$$

Multiplions ensuite cette équation par l'équation 2° du § 39

$$\sin(n+\mathrm{III}) = \frac{\sin(n+\mathrm{I})\sin(n+\mathrm{VI})}{\sin(n+\mathrm{IV})};$$

alors

$$-\cos(n+\mathrm{III}) = \frac{\cos(n+\mathrm{IV})\sin(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{I})\cos(n+\mathrm{V})}{\sin(n+\mathrm{IV})\sin(n+\mathrm{V})} + \frac{\cos(n+\mathrm{VI})\sin(n+\mathrm{I})}{\sin(n+\mathrm{V})}.$$

Or, d'après l'équation 1° du § 39, on a

$$-\cos(n+\text{I}) = \frac{\cos(n+\text{VI})\cos(n+\text{V})\sin(n+\text{I})}{\sin(n+\text{V})} + \frac{\sin(n+\text{VI})\cos(n+\text{IV})\sin(n+\text{I})}{\sin(n+\text{IV})\sin(n+\text{V})};$$

donc, en faisant la somme,

$$-\cos(n+\text{I}) - \cos(n+\text{III}) = \frac{[\cos(n+\text{V})+1]\cdot\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}{\sin(n+\text{IV})}\cdot\frac{\sin(n+\text{I})}{\sin(n+\text{V})}. \quad (c)$$

Divisant la formule (a) par la formule (c), on obtiendra

$$-\frac{\sin(n+\text{I}) - \sin(n+\text{III})}{\cos(n+\text{I}) + \cos(n+\text{III})} = \frac{\sin(n+\text{V})}{1+\cos(n+\text{V})}\cdot\frac{\sin(n+\text{IV}) - \sin(n+\text{VI})}{\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}.$$

Or (§ 19, l)

$$\frac{\sin(n+\text{I}) - \sin(n+\text{III})}{\cos(n+\text{I}) + \cos(n+\text{III})} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\text{I}) - (n+\text{III})]$$

et (§ 19, f)

$$\frac{\sin(n+\text{V})}{1+\cos(n+\text{V})} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{V}).$$

Donc

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\text{I}) - (n+\text{III})] = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{V})\cdot[\sin(n+\text{IV}) - \sin(n+\text{VI})]}{\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]},$$

et puisque (§ 19, h)

$$\sin(n+\text{IV}) - \sin(n+\text{VI}) = 2\cos\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]\sin\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})-(n+\text{VI})]$$

et (§ 19, c)

$$\frac{2\cos\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}{\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]} = \frac{1}{\sin\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]},$$

on aura

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\text{I}) - (n+\text{III})] = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{V})\sin\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})-(n+\text{VI})]}{\sin\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}.$$

2° On aura de même, en divisant la formule (b) par la formule (c) (§ 19, k),

$$-\frac{\sin(n+\text{I}) + \sin(n+\text{III})}{\cos(n+\text{I}) + \cos(n+\text{III})} = \frac{\sin(n+\text{V})}{1+\cos(n+\text{V})}\cdot\frac{\sin(n+\text{IV}) + \sin(n+\text{VI})}{\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}$$

$$= -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\text{I}) + (n+\text{III})].$$

En remplaçant (§ 19, f)

$$\frac{\sin(n+\text{V})}{1+\cos(n+\text{V})} \quad \text{par} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{V})$$

et (§ 19 g) $\sin(n+\text{IV}) + \sin(n+\text{VI})$

par $$2\sin\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]\cdot\cos\tfrac{1}{2}[(n+\text{IV})-(n+\text{VI})],$$
nous obtenons
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{V})\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]\cdot\cos\frac{1}{2}[(n+\text{IV})-(n+\text{VI})]}{\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}$$
$$=-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\text{I})+(n+\text{III})].$$
Or, d'après le § 19, c,
$$\frac{2\sin\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}{\sin[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}.$$
Donc
$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}[(n+\text{I})+(n+\text{III})]=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{V})\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}[(n+\text{IV})-(n+\text{VI})]}{\cos\frac{1}{2}[(n+\text{IV})+(n+\text{VI})]}.$$

§ 48.

Soient donnés les trois angles d'un triangle sphérique. Alors on trouve les côtés à l'aide d'une quelconque des formules suivantes, en y faisant $n=0$, II ou IV:

1° $$\cos(n+\text{II})=\frac{\cos(n+\text{I})\cos(n+\text{III})-\cos(n+\text{V})}{\sin(n+\text{I})\sin(n+\text{III})},\quad (\text{§ 39, équ. } 3^\circ)$$

2° $$\left\{\begin{aligned}\cos(n+\text{II})&=-\frac{\cos[(n+\text{V})-\psi]}{\cos\psi\sin(n+\text{I})\sin(n+\text{III})},\\ \operatorname{tg}\psi&=-\frac{\cos(n+\text{I})\cos(n+\text{III})}{\sin(n+\text{V})}.\end{aligned}\right\}\quad (\text{§ } 40)$$

3° $$\sin^2\tfrac{1}{2}(n+\text{II})$$
$$=\frac{\sin\frac{1}{2}[(n+\text{III})+(n+\text{V})+(n+\text{I})]\sin\frac{1}{2}[(n+\text{III})+(n+\text{I})-(n+\text{V})]}{\sin(n+\text{III})\sin(n+\text{I})}.\quad (\text{§ } 45)$$

Posons dans la première de ces trois formules

a) $n+\text{I}=90^\circ$; alors $\cos(n+\text{II})=-\cos(n+\text{V}):\sin(n+\text{III})$;

b) $n+\text{III}=90^\circ$; alors $\cos(n+\text{II})=-\cos(n+\text{V}):\sin(n+\text{I})$;

c) $n+\text{V}=90^\circ$; alors $\cos(n+\text{II})=\cot.(n+\text{I}).\cot(n+\text{III})$.

§ 49.

Soient donnés deux angles et le côté adjacent.

A. On détermine l'angle opposé au côté donné par les formules suivantes (4° et 5°), en y faisant $n=0$, II ou IV.

4° $$\cos(n+\text{I})$$
$$= \cos(n+\text{III})\cos(n+\text{V}) - \sin(n+\text{III})\cos(n+\text{IV})\sin(n+\text{V}). \quad (\S\ 38,\ \text{équ. } 1^{\circ})$$

5° $$\left|\begin{aligned} \cos(n+\text{I}) &= \frac{\sin\begin{Bmatrix}(n+\text{III})+\varphi'\\(n+\text{V})\ +\varphi\end{Bmatrix}\cos\begin{Bmatrix}n+\text{V}\\n+\text{III}\end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix}},\\ \cot\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix} &= -\cos(n+\text{IV})\,\text{tg}\begin{Bmatrix}n+\text{V}\\n+\text{III}\end{Bmatrix}.\end{aligned}\right| \quad (\S\ 41)$$

Posons dans l'équation 4°

a) $n+\text{III} = 90°$; alors $\cos(n+\text{I}) = -\cos(n+\text{IV})\sin(n+\text{V})$.

b) $n+\text{V} = 90°$; alors $\cos(n+\text{I}) = -\cos(n+\text{IV})\sin(n+\text{III})$.

c) $n+\text{IV} = 90°$; alors $\cos(n+\text{I}) = \cos(n+\text{III})\cos(n+\text{V})$.

B. On peut trouver les deux autres côtés par une quelconque des formules suivantes, en y faisant de même $n = 0$, II ou IV:

6° $$-\cot(n+\text{II}) = \frac{\cot(n+\text{V})\cdot\sin\begin{Bmatrix}n+\text{III}\\n+\ \text{I}\end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix}n+\text{IV}\\n+\text{VI}\end{Bmatrix}} + \cot\begin{Bmatrix}n+\text{IV}\\n+\text{VI}\end{Bmatrix}\cos\begin{Bmatrix}n+\text{III}\\n+\ \text{I}\end{Bmatrix}. \quad (\S\ 39,\ \text{équ. } 1^{\circ})$$

7° $$\left|\begin{aligned} -\cot(n+\text{II}) &= \frac{\sin\begin{Bmatrix}(n+\text{I})\ +\varphi'\\(n+\text{III})+\varphi\end{Bmatrix}}{\sin\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix}}\cot\begin{Bmatrix}n+\text{VI}\\n+\text{IV}\end{Bmatrix},\\ \text{tg}\begin{Bmatrix}\varphi'\\\varphi\end{Bmatrix} &= \text{tg}(n+\text{V})\cos\begin{Bmatrix}n+\text{VI}\\n+\text{IV}\end{Bmatrix}.\end{aligned}\right| \quad (\S\ 42)$$

8° $$\left|\begin{aligned} -\text{tg}\tfrac{1}{2}[n+\text{II})-(n+\text{IV})] &= \text{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{VI})\frac{\sin\frac{1}{2}[(n+\text{V})-(n+\text{I})]}{\sin\frac{1}{2}[(n+\text{V})+(n+\text{I})]},\\ -\text{tg}\tfrac{1}{2}[n+\text{II})+(n+\text{IV})] &= \text{tg}\tfrac{1}{2}(n+\text{VI})\frac{\cos\frac{1}{2}[(n+\text{V})-(n+\text{I})]}{\cos\frac{1}{2}[(n+\text{V})+(n+\text{I})]}.\end{aligned}\right| \quad (\S\ 47)$$

Posons dans la formule 6°

d) $n+\text{III} = 90°$; alors $-\cot(n+\text{II}) = \cot(n+\text{V}) : \sin(n+\text{IV})$.

e) $n+\text{IV} = 90°$; alors $-\cot(n+\text{II}) = \cot(n+\text{V})\sin(n+\text{III})$.

f) $n+\text{V} = 90^\circ$; alors $-\cot(n+\text{II}) = \cot\begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{IV} \end{Bmatrix} \cos\begin{Bmatrix} n+\text{I} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix}$.

g) $n+\text{I} = 90^\circ$; alors $-\cot(n+\text{II}) = \cot(n+\text{V}) : \sin(n+\text{VI})$.

h) $n+\text{VI} = 90^\circ$; alors $-\cot(n+\text{II}) = \cot(n+\text{V}) \sin(n+\text{I})$.

§ 50.

Soient donnés un angle et deux côtés, dont l'un est opposé à l'angle donné.

A. On trouve le troisième côté par la formule suivante (9°) en y faisant $n = 0$, II ou IV:

$$9^\circ \quad \left|\begin{array}{l} \sin\begin{Bmatrix} (n+\text{II})+\varphi' \\ (n+\text{II})+\varphi \end{Bmatrix} = \dfrac{\cos\begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{IV} \end{Bmatrix} \sin\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix}}{\cos\begin{Bmatrix} n+\text{IV} \\ n+\text{VI} \end{Bmatrix}}, \\ \cot\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix} = -\cos\begin{Bmatrix} n+\text{III} \\ n+\text{I} \end{Bmatrix} \operatorname{tg}\begin{Bmatrix} n+\text{IV} \\ n+\text{VI} \end{Bmatrix}. \end{array}\right| \quad (\S\ 43)$$

Si	on aura	d'après	en remplaç. n par
a) $n+\text{III} = 90^\circ$,	$\cos(n+\text{II}) = \dfrac{\cos(n+\text{VI})}{\cos(n+\text{IV})}$,	§ 49 c	$n+\text{V}$,
b) $n+\text{I} = 90^\circ$,	$\cos(n+\text{II}) = \dfrac{\cos(n+\text{IV})}{\cos(n+\text{VI})}$,	§ 49 c	$n+\text{III}$,
c) $n+\text{IV} = 90^\circ$,	$\sin(n+\text{II}) = -\dfrac{\cos(n+\text{VI})}{\cos(n+\text{III})}$,	§ 49 b	$n+\text{V}$,
d) $n+\text{VI} = 90^\circ$,	$\sin(n+\text{II}) = -\dfrac{\cos(n+\text{IV})}{\cos(n+\text{I})}$,	§ 49 a	$n+\text{III}$.

B. L'angle compris entre les deux côtés donnés peut être déduit de la formule suivante (10°) en y faisant $n = 0$, II ou IV:

$$10^\circ \quad \left|\begin{array}{l} \sin\begin{Bmatrix} (n+\text{I})+\varphi' \\ (n+\text{I})+\varphi \end{Bmatrix} = -\cot\begin{Bmatrix} n+\text{II} \\ n+\text{VI} \end{Bmatrix} \operatorname{tg}\begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{II} \end{Bmatrix} \sin\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix}, \\ \operatorname{tg}\begin{Bmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{Bmatrix} = \operatorname{tg}\begin{Bmatrix} n+\text{V} \\ n+\text{III} \end{Bmatrix} \cos\begin{Bmatrix} n+\text{VI} \\ n+\text{II} \end{Bmatrix}. \end{array}\right| \quad (\S\ 44)$$

Si	on aura	d'après	en remplaç. n par
e) $n+\text{III} = 90°$,	$\cos(n+\text{I}) = -\cot(n+\text{VI})\,\mathrm{tg}(n+\text{II})$,	§ 49, f	$n+\text{IV}$,
f) $n+\text{V} = 90°$,	$\cos(n+\text{I}) = -\cot(n+\text{II})\,\mathrm{tg}(n+\text{VI})$,	§ 49, f	$[n]$
g) $n+\text{VI} = 90°$,	$\sin(n+\text{I}) = -\cot(n+\text{II})\,\mathrm{tg}(n+\text{V})$,	§ 49, h	$[n]$
h) $n+\text{II} = 90°$,	$\cot(n+\text{I}) = -\cot(n+\text{V}):\cos(n+\text{VI})$,	§ 49, f	$n+\text{III}$.

C. On déduit l'angle opposé à l'autre côté donné [ou plutôt l'angle inconnu opposé à un côté donné] de la formule suivante (11°):

11° $$\sin(n+\text{I}) = \frac{\sin(n+\text{IV})\,\sin\left\{\begin{matrix} n+\text{III} \\ n+\text{V} \end{matrix}\right\}}{\sin\left\{\begin{matrix} n+\text{VI} \\ n+\text{II} \end{matrix}\right\}}. \qquad (\S\ 39,\ \text{équ. } 2°)$$

§ 51.

Si dans les trois problèmes précédents (§§ 48, 49 et 50) l'on remplace les côtés par les angles et les angles par les côtés, on résoudra les nouveaux problèmes par les mêmes formules en y supposant $n = \text{I}$, III ou V (§ 39).

§ 52.

Quand les côtés d'un triangle sphérique sont positifs et plus petits que deux angles droits, on peut supposer que la même chose a lieu pour les angles. En effet la figure 6 du § 37 montre que le premier angle peut être regardé comme positif et plus petit que deux angles droits; et l'on voit par la formule $\sin \text{I} = \dfrac{\sin \text{IV}\,\sin\left\{\begin{matrix} \text{III} \\ \text{V} \end{matrix}\right\}}{\sin\left\{\begin{matrix} \text{VI} \\ \text{II} \end{matrix}\right\}}$ (§ 50, 11°) qu'alors il en est de même des deux autres angles. Dans ce qui suit nous supposerons que les angles et les côtés sont plus petits que 180°.

§ 53.

Un triangle sphérique, dont les côtés sont plus petits que deux angles droits, est complètement déterminé quand on en donne trois angles, ou trois côtés, ou deux angles et le côté adjacent, ou enfin deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, ce qu'on voit par les formules des §§ 48 et 49 et par le théorème du § 51.

§ 54.

Il résulte encore des formules précédentes qu'à des côtés égaux sont opposés des angles égaux, et réciproquement. Supposons par exemple $\mathrm{I} = \mathrm{III}$ dans la formule 4° du § 49; alors on aura $\mathrm{IV} = \mathrm{VI}$, car

$$\cos \mathrm{I} = \cos \mathrm{III} \cos \mathrm{V} - \sin \mathrm{III} \cos \mathrm{IV} \sin \mathrm{V}$$

et

$$\cos \mathrm{III} = \cos \mathrm{V} \cos \mathrm{I} - \sin \mathrm{V} \cos \mathrm{VI} \sin \mathrm{I}.$$

(La dernière équation se déduira de la première si l'on augmente les nombres de II.)

§ 55.

Au plus petit côté est opposé le plus grand angle, et réciproquement.*) Cela résulte de la formule suivante (§ 47)

$$-\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\mathrm{I} - \mathrm{III}) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{V} \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{IV} - \mathrm{VI})}{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{IV} + \mathrm{VI})};$$

car si $\mathrm{I} - \mathrm{III}$ est négatif, $\mathrm{IV} - \mathrm{VI}$ devra être positif.

§ 56.

La somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté, et la somme des trois côtés est plus petite que quatre angles droits; car on a d'après les §§ 45 et 46

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}(\mathrm{I}) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{IV} + \mathrm{II} - \mathrm{VI}) \sin \frac{1}{2}(\mathrm{IV} - \mathrm{II} + \mathrm{VI})}{\sin \mathrm{II} \sin \mathrm{VI}}$$

et

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}(\mathrm{I}) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathrm{IV} + \mathrm{II} + \mathrm{VI}) \sin \frac{1}{2}(\mathrm{VI} + \mathrm{II} - \mathrm{IV})}{\sin \mathrm{VI} \sin \mathrm{II}}.$$

Or, si l'on suppose dans la première équation $\mathrm{VI} > \mathrm{IV} + \mathrm{II}$, il faut aussi que II soit plus grand que $\mathrm{IV} + \mathrm{VI}$, sans quoi $\cos^2 \frac{1}{2}(\mathrm{I})$ serait négatif; mais il

*) [Il ne faut pas oublier que les angles considérés par l'auteur sont *les angles extérieurs*, suppléments de ceux qu'on appelle ordinairement les angles du triangle ou du polygone.]

est impossible que VI soit plus grand que IV+II, en même temps que II > IV+VI. On ne peut pas avoir non plus VI = IV + II, car on aurait alors $\cos^2 \frac{1}{2}(\text{I}) = 0$. Donc il faut que VI < IV + II et qu'en général la somme de deux côtés soit plus grande que le troisième côté. Il s'ensuit que dans la deuxième équation $\sin\frac{1}{2}(\text{VI}+\text{II}-\text{IV})$ est positif, et par conséquent aussi $\sin\frac{1}{2}(\text{IV}+\text{II}+\text{VI})$. Alors on aura $\frac{\text{IV}+\text{II}+\text{VI}}{2} < 180°$ (§ 52); il est donc démontré que la somme IV + II + VI est plus petite que 360°.

§ 57.

On démontre de même que la somme de deux angles est plus grande que le troisième, et que la somme des trois angles est plus petite que quatre angles droits. Cela résulte aussi du § 37, nº 6, a, et du § 56.

§ 58.

Étant donné un point C, situé (fig. 12) sur un hémisphère entre le pôle P et la circonférence du cercle fondamental, si l'on joint C à cette circonférence par un arc de grand cercle CB*), cet arc sera *minimum* lorsqu'il se termine au point r où le prolongement de la perpendiculaire PC rencontre la circonférence du cercle fondamental. Ensuite il croîtra depuis Cr jusqu'à ce qu'il devienne égal à $90° = rQ = CQ$; puis il croîtra encore jusqu'à ce qu'il devienne égal à $180° - Cr$ $(= Cq)$. Ainsi B tombe au-dessous de QR [fig. 12] quand CB est obtus, mais au-dessus de QR quand CB est aigu.

En effet désignons CBq par I, l'hypoténuse BC par II, la cathète Cr par IV et rB par VI. Alors on aura, d'après le § 49, c (en supposant $n = $ I), cos II = cos IV cos VI ou bien $\cos BC = \cos Cr \cos rB$, par où l'on reconnaît aisément la justesse de l'assertion.

Pendant que l'arc rB croît de 0 à 90° et CB de Cr à CQ $(= 90°)$, l'angle CBq croîtra de 90° à $180° - Cr$; mais ensuite, quand rB croît de

*) Voir Kästner: *Les éléments des mathématiques*, traduit [en danois] par M. le professeur Wolf, 2e proposition de la trigonométrie sphérique, p. 517.

90° à 180° et CB de 90° à $180^\circ - Cr$, l'angle CBq décroîtra de $180^\circ - Cr$ à 90°. Supposons en effet $n = \mathrm{V}$ dans le § 49, h; alors $\mathrm{V} = 90^\circ$ et $-\cot \mathrm{I} = \cot \mathrm{IV} \cdot \sin \mathrm{VI}$, ou bien $-\cot CBq = \cot Cr \cdot \sin rB$, formule dont on déduit aisément la démonstration de la proposition.

§ 59.

Supposons les côtés (II, IV, VI) d'un triangle plus petits que deux angles droits, et dans l'équation (§ 50, 11°)

$$\sin \mathrm{I} = \frac{\sin \mathrm{IV} \sin \mathrm{V}}{\sin \mathrm{II}}$$

les arcs IV, V et II différents de 90°. Alors le tableau suivant montrera les cas où l'angle cherché I est aigu ou obtus ou bien a deux valeurs.

Si l'on a

$$\left.\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}\ \mathrm{V}\ \text{obtus, }\mathrm{IV}\ \text{obtus et }\mathrm{II}\left\{\begin{matrix}<180^\circ-\mathrm{IV}\\>180^\circ-\mathrm{IV}\end{matrix}\right\},\quad \text{alors}\quad \mathrm{I}\left\{\begin{matrix}\text{deux valeurs}\\\text{aigu}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\}\ \mathrm{V}\ \text{aigu, }\mathrm{IV}\ \text{aigu et }\mathrm{II}\left\{\begin{matrix}>180^\circ-\mathrm{IV}\\<180^\circ-\mathrm{IV}\end{matrix}\right\},\quad \text{alors}\quad \mathrm{I}\left\{\begin{matrix}\text{deux valeurs}\\\text{obtus}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}5\\6\end{matrix}\right\}\ \mathrm{V}\ \text{obtus, }\mathrm{IV}\ \text{aigu et }\mathrm{II}\left\{\begin{matrix}<\mathrm{IV}\\>\mathrm{IV}\end{matrix}\right\},\quad \text{alors}\quad \mathrm{I}\left\{\begin{matrix}\text{deux valeurs}\\\text{obtus}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}7\\8\end{matrix}\right\}\ \mathrm{V}\ \text{aigu, }\mathrm{IV}\ \text{obtus et }\mathrm{II}\left\{\begin{matrix}>\mathrm{IV}\\<\mathrm{IV}\end{matrix}\right\},\quad \text{alors}\quad \mathrm{I}\left\{\begin{matrix}\text{deux valeurs}\\\text{aigu}\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}9\\10\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\mathrm{II} = \mathrm{IV}, & \text{alors} & \mathrm{I} = \mathrm{V},\\ \mathrm{II} + \mathrm{IV} = 180^\circ, & \text{alors} & \mathrm{I} = 180^\circ - \mathrm{V}.\end{matrix}$$

Démonstration. Aucun des côtés du triangle ABC (fig. 13 à 18) n'étant plus grand que 180°, le triangle se trouvera tout entier sur la surface de l'un des hémisphères déterminés par le plan du côté AB (= VI). Les côtés II et IV, étant différents de 90°, se rencontrent en un point C différent du pôle P du cercle fondamental ABD. On peut donc prolonger dans les deux sens l'arc de grand cercle PC et de même sa perpendiculaire QPR jusqu'à la circonférence du cercle fondamental. Ces deux demi-cercles sont représentés, dans les fig. 13 à 18, par les deux lignes droites rq et QR.

1) Puisque IV est obtus et II aigu, A tombera (fig. 13) au-dessous de QR, tandis que B et l'extrémité D du demi-cercle ACD tomberont au-dessus de QR (§ 58). Mais puisque l'arc $180°$ — IV ($= CD$) est supposé plus grand que II ($= CB$), ce dernier tombera soit entre Cr et CD, soit entre Cr et CQ (§ 58), et peut dans les deux cas avoir la même grandeur. I est aigu dans l'un des deux cas [le dernier], obtus dans l'autre. Donc on aura deux valeurs de I.

2) L'arc II (fig. 14) étant supposé $> 180°$ — IV ou bien II $> CD$, on aura $CDR < CBA$ (§ 55) ou bien V $< 180°$ — I; or on a supposé V obtus; donc I est aigu.

3) IV est aigu et II obtus; donc A (fig. 15) tombera au-dessus de QR, et B au-dessous. D'autre part l'arc II, étant $> 180°$ — IV, peut avoir (d'après le § 58) la même grandeur soit entre CD et Cq, soit de l'autre côté de Cq en faisant le même angle avec Cq. Donc I peut être obtus ou aigu (§ 58).

4) D'après la condition donnée, on a II $< 180°$ — IV ou bien II $< CD$ (fig. 16); dans le triangle CBD on aura par conséquent $CDQ > CBA$ ou bien V $> 180°$ — I (§ 55). Or V est aigu; donc I est obtus.

5) II et IV sont tous les deux supposés aigus; donc B, A et C (fig. 17) sont du même côté de QR (§ 58); et puisqu'on a supposé II $<$ IV, B peut tomber d'un côté ou de l'autre de Cr; si B tombe d'un côté, I est obtus; si B tombe de l'autre, I est aigu (§ 58); donc on aura deux valeurs de I.

6) II $>$ IV; donc V $<$ I (§ 55). Or V est obtus; donc I est obtus.

7) II et IV, étant tous les deux obtus, rencontrent la perpendiculaire QR (fig. 18) entre les points Q et R (§ 58). Et puisque II $>$ IV, l'arc II peut être soit entre IV et Cq, soit de l'autre côté de Cq. Donc l'angle I peut être soit aigu, soit obtus (§ 58).

8) Si II $<$ IV, on aura V $>$ I (§ 55); donc, V étant aigu, I sera aigu aussi.

9) De II $=$ IV on conclut V $=$ I (§ 54).

10) II $+$ IV $= 180°$ donne I $= 180°$ — V, puisque les arcs supplémentaires de II et IV forment avec AB (fig. 19) un autre triangle ABC', dont les angles et les côtés sont égaux à ceux du triangle ABC (§ 53).

§ 60.

Supposons comme dans le paragraphe précédent (§ 59) que les côtés du triangle (II, IV et VI) soient $< 180°$ et que dans l'équation $\sin \mathrm{I} = \dfrac{\sin \mathrm{IV} \sin \mathrm{V}}{\sin \mathrm{II}}$ (§ 50, 11°) deux des éléments donnés (V, IV, II) soient égaux à 90°. Alors on aura

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} = 180° = \mathrm{IV}, & \text{si V et II sont} = 90° & \text{(fig. 19).} \\ \mathrm{I} = 90° = \mathrm{II}, & \text{si V et IV sont} = 90°. & \\ \mathrm{I} = 90° = \mathrm{V}, & \text{si IV et II sont} = 90°. & \end{array}$$

Si au contraire un seul des éléments donnés est égal à 90°, on aura les cas suivants:

$$\begin{array}{llll}
\left.\begin{array}{r}1\\2\end{array}\right\} & \mathrm{V} = 90° \text{ et } \mathrm{IV} \left\{\begin{array}{l} > \mathrm{II} \\ < \mathrm{II} \end{array}\right\}, & \text{d'où il suit:} & \mathrm{I} \left\{\begin{array}{l}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{array}\right\}. \\
\left.\begin{array}{r}3\\4\end{array}\right\} & \mathrm{V} \text{ aigu, } \mathrm{IV} = 90° \text{ et } \mathrm{II} \left\{\begin{array}{l}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{array}\right\} & \text{— - —} & \mathrm{I} \left\{\begin{array}{l}\text{impossible}\\ \text{deux valeurs}\end{array}\right\}. \\
\left.\begin{array}{r}5\\6\end{array}\right\} & \mathrm{V} \text{ obtus, } \mathrm{IV} = 90° \text{ et } \mathrm{II} \left\{\begin{array}{l}\text{obtus}\\ \text{aigu}\end{array}\right\} & \text{— - —} & \mathrm{I} \left\{\begin{array}{l}\text{impossible}\\ \text{deux valeurs}\end{array}\right\}. \\
\left.\begin{array}{r}7\\8\end{array}\right\} & \mathrm{V} \text{ aigu, } \mathrm{IV} \left\{\begin{array}{l}\text{obtus}\\ \text{aigu}\end{array}\right\} \text{ et } \mathrm{II} = 90° & \text{— - —} & \mathrm{I} \left\{\begin{array}{l}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{array}\right\}. \\
\left.\begin{array}{r}9\\10\end{array}\right\} & \mathrm{V} \text{ obtus, } \mathrm{IV} \left\{\begin{array}{l}\text{obtus}\\ \text{aigu}\end{array}\right\} \text{ et } \mathrm{II} = 90° & \text{— - —} & \mathrm{I} \left\{\begin{array}{l}\text{aigu}\\ \text{obtus}\end{array}\right\}.
\end{array}$$

Démonstration. 1 et 2 résultent de ce que le plus grand côté est opposé au plus petit angle (§ 55).

Les cas 3 et 5 sont impossibles; car, IV étant un angle droit, II et V ne peuvent être ni tous les deux aigus, ni tous les deux obtus, parce que $-\cot \mathrm{II} = \cot \mathrm{V} \sin \mathrm{III}$ (§ 49, e).

Dans les cas 7, 8, 9 et 10, I et IV sont d'espèce différente, parce que, II étant égal à 90°, on a $-\cot \mathrm{IV} = \cot \mathrm{I} \sin \mathrm{III}$, ce qui résulte du § 49, h, en supposant $n = \mathrm{II}$.

On peut démontrer les propositions 4 et 6 de la manière suivante: que II soit obtus et V aigu (comme dans le 4[e] cas et dans le triangle ACB, fig. 20) ou que II soit aigu et V obtus (comme dans le 6[e] cas et dans le triangle ACB'), on pourra toujours, avec II et avec les suppléments de IV et de VI, construire un autre triangle ($A'BC$ ou $A'B'C$) dans lequel II, IV et V ont conservé leurs valeurs primitives, tandis que I est remplacé par l'angle supplémentaire. Par conséquent on peut former deux triangles différents dans lesquels II, IV et V ont les mêmes valeurs données.

§ 61.

D'après le § 37, n° 6, a, on peut de tout triangle en déduire un autre dont les angles sont égaux aux côtés du triangle primitif et dont les côtés sont égaux aux angles du triangle primitif, en laissant du reste inaltéré l'ordre de succession des éléments. Par conséquent, si VI, V et III sont donnés, et qu'on veuille déterminer II par la formule $\sin \text{II} = \frac{\sin \text{V} \cdot \sin \text{VI}}{\sin \text{III}}$, on pourra désigner les données et les inconnues de la même manière qu'aux §§ 59 et 60 et appliquer les règles qui y sont indiquées.

§ 62.

Les formules 9° et 10° du § 50 étant dérivées d'une équation qui contient à la fois le cosinus et le sinus de l'arc cherché, il est à présumer qu'elles ne donnent pour cet arc aucune valeur positive et inférieure à 180° qui ne soit pas compatible avec les données, quand celles-ci sont toutes positives et plus petites que 180°, comme c'était le cas pour l'équation 11° du § 50; mais pour en avoir une assurance complète:

1°. Je suppose que $n^- + \text{II}^-$ soit une valeur de $n + \text{II}$ positive et plus petite que deux angles droits, et calculée à l'aide de l'équation 9° du § 50, les données étant $n + \text{III}$, $n + \text{IV}$, $n + \text{VI}$. De l'équation 4° du § 49 je conclus que dans un triangle où $n^- + \text{II}^-$, $n + \text{III}$, $n + \text{IV}$ sont donnés, et dans lequel on appelle $n^- + \text{VI}^-$ l'élément opposé à $n + \text{III}$, on aura

$$\cos(n^- + \text{VI}^-) = \cos(n^- + \text{II}^-)\cos(n + \text{IV}) - \sin(n^- + \text{II}^-)\cos(n + \text{III})\sin(n + \text{IV});$$

or $\cos(n + \text{VI})$ aura la même valeur si dans l'équation (§ 50, 9°)

$$\sin[(n^- + \text{II}^-) + \varphi'] = \frac{\cos(n + \text{VI})}{\cos(n + \text{IV})}\sin\varphi'$$

on exprime le sinus de la somme par les cosinus et sinus de chaque terme, puis qu'on divise l'équation par $\sin\varphi'$ et enfin qu'on substitue $-\cos(n+\text{III})\,\text{tg}\,(n+\text{IV})$ à $\cot\varphi'$. Par conséquent on aura $n + \text{VI} = n^- + \text{VI}^-$, et la valeur calculée $n^- + \text{II}^-$ peut appartenir au même triangle que les données $n + \text{III}$, $n + \text{IV}$ et $n + \text{VI}$.

2°. Je suppose de même que $n^- + \text{I}^-$ soit une valeur de $n + \text{I}$ positive et plus petite que 180°, et calculée à l'aide de l'équation 10° du § 50, les données étant $n + \text{II}$, $n + \text{V}$ et $n + \text{VI}$. De l'équation 6° du § 49, je conclus que dans un triangle où les données sont $n^- + \text{I}^-$, $n + \text{V}$ et $n + \text{VI}$, et dans lequel on désigne par $n^- + \text{II}^-$ l'élément opposé à $n + \text{V}$, on a

$$-\cot(n^- + \text{II}^-) = \frac{\cot(n + \text{V})\sin(n^- + \text{I}^-)}{\sin(n + \text{VI})} + \cot(n + \text{VI})\cos(n^- + \text{I}^-)$$

ou bien, en divisant par $\cot(n + \text{VI})$,

$$-\cot(n^- + \text{II}^-)\,\text{tg}\,(n + \text{VI}) = \frac{\cot(n + \text{V})\sin(n^- + \text{I}^-)}{\cos(n + \text{VI})} + \cos(n^- + \text{I}^-).$$

Or on aura la même formule pour $\cot(n + \text{II})$, si dans l'équation 10° du § 50 on exprime $\sin[(n^- + \text{I}^-) + \varphi']$ par les cosinus et les sinus de $n^- + \text{I}^-$ et de φ', puis qu'on divise par $\sin\varphi'$ et enfin qu'on substitue la valeur de $\cot\varphi'$. Par conséquent $n^- + \text{II}^- = n + \text{II}$, et $n^- + \text{I}^-$, $n + \text{II}$, $n + \text{V}$, $n + \text{VI}$ appartiennent bien au même triangle.

§ 63.

On peut de même construire un triangle dont les côtés et les angles sont plus petits que deux droits avec deux des éléments donnés dans l'une des équations c, d, g du § 50, et avec la valeur trouvée pour l'élément cherché, à condition que celle-ci soit positive et plus petite que deux droits. On démontre ensuite que la troisième donnée appartient effectivement au triangle construit. Donc la valeur trouvée est compatible avec les angles et les côtés donnés.

On a par exemple (§ 50, c) $n + \text{IV} = 90°$ et

$$\sin(n + \text{II}) = -\frac{\cos(n + \text{VI})}{\cos(n + \text{III})}.$$

Désignons la valeur trouvée de l'élément cherché par $n^- + \text{II}^-$ et construisons avec $n^- + \text{II}^-$, $n + \text{IV}$ et $n + \text{III}$ un triangle dans lequel nous désignons par $n^- + \text{VI}^-$ l'élément opposé à $n + \text{III}$. Alors (§ 49, b)

$$\cos(n^- + \text{VI}^-) = -\sin(n^- + \text{II}^-)\cos(n + \text{III});$$

or on a aussi (§ 50, c)

$$\cos(n + \text{VI}) = -\sin(n^- + \text{II}^-)\cos(n + \text{III}).$$

Donc

$$n + \text{VI} = n^- + \text{VI}^-.$$

J'ajoute encore les propositions suivantes pour montrer comment les signes de direction définis dans les §§ 30 et 31 peuvent servir à former une équation pour des polygones rectilignes dont les côtés se trouvent dans des plans différents.

§ 64.

Un polygone de cette nature est indéterminé, lorsque quatre de ses côtés sont de longueur inconnue.

Démonstration.

1° Supposons que les quatre côtés de longueur inconnue soient consécutifs, et représentés par ab, bc, cd et de (fig. 21). Alors, si les points a, b et c sont en ligne droite, on peut diminuer ab et prolonger cb de la même quantité sans que la direction de ces deux segments ou les directions et les longueurs des autres segments en soient altérées. Donc dans ce cas les deux côtés du polygone sont indéterminés.

Si ni a, b, c ni c, d, e ne sont en ligne droite, mais si abc se trouve dans le même plan que cde, on pourra dans ce plan mener des droites parallèles à bc et cd qui rencontrent ab et de. Donc dans ce cas aussi le polygone est indéterminé.

Si le triangle abc n'est pas dans le même plan que cde, les plans de ces triangles se coupent suivant une droite passant par c. Il est alors possible de mener par les autres points de cette droite des parallèles à cd et bc, rencontrant ab et de. Donc le polygone est encore indéterminé.

2° D'après le § 2, on peut donner aux côtés d'un polygone rectiligne un ordre de succession quelconque sans en changer la somme, les directions et les longueurs. Donc si les côtés ab, bc, cd et de ne se suivent pas immédiatement, comme nous l'avons supposé dans la démonstration précédente, on pourra imaginer un autre polygone dont les côtés sont les mêmes, mais où les quatre côtés de longueur inconnue sont consécutifs. Alors, puisque d'après la première démonstration, ces quatre côtés peuvent avoir une infinité de déterminations dans cet ordre de succession, ils en auront aussi une infinité quand on les prendra dans l'ordre primitif (§ 2).

§ 65.

Dans tout polygone rectiligne dont les côtés ne sont pas tous dans le même plan, on suppose que chaque côté commence au point où le précédent se termine, de façon que la somme de tous les côtés soit égale à zéro (§ 2). On désignera la longueur du premier, du second, du troisième, ..., du $m^{\text{ième}}$ ou dernier côté respectivement par $|\mathrm{I}^{\smile}$, $|\overline{\mathrm{III}^{\smile}}$, $|\overline{\mathrm{V}^{\smile}}$, $|\overline{\mathrm{VII}^{\smile}}$, ..., $|\overline{(2m-\mathrm{I})}^{\smile}$, et les côtés eux-mêmes dans l'ordre où ils se suivent par les nombres impairs $\mathrm{I}^{\smile}$, $\mathrm{III}^{\smile}$, $\mathrm{V}^{\smile}$, $\mathrm{VII}^{\smile}$, ..., $(2m-1)^{\smile}$. Le petit signe $^{\smile}$ placé en haut et à droite est ajouté pour distinguer le côté de l'angle que forme le plan passant par ce côté et par le précédent avec le plan passant par ce même côté et par le suivant. Nous désignerons en effet ces angles par les mêmes nombres I, III, V, ..., $(2m-\mathrm{I})$, I étant l'angle compris entre les deux plans qui se coupent suivant la droite $\mathrm{I}^{\smile}$ (fig. 22) ou bien l'angle compris entre les plans CDA et DAB, III l'angle compris entre les plans qui se coupent suivant la droite $\mathrm{III}^{\smile}$ ou bien l'angle compris entre les plans DAB et ABC, et ainsi de suite, $(2m-\mathrm{I})$ l'angle que forme le plan passant par le dernier et le premier côté avec le plan passant par le dernier et l'avant-dernier côté.

De plus l'angle qui mesure la déviation de chaque côté par rapport au prolongement du côté précédent sera désigné par les nombres pairs II, IV, VI, ..., $2m$, en prenant toujours le nombre qui est plus fort d'une unité que le numéro du côté précédent. Ainsi II est l'angle qui mesure la déviation de $\mathrm{III}^{\smile}$ par rapport au prolongement de $\mathrm{I}^{\smile}$; IV est l'angle qui mesure la déviation de $\mathrm{V}^{\smile}$ par rapport au prolongement de $\mathrm{III}^{\smile}$, etc., $2m$ est l'angle qui mesure la déviation du premier côté $\mathrm{I}^{\smile}$ par rapport au prolongement du dernier côté $(2m-\mathrm{I})^{\smile}$.

§ 66.

Tous ces angles, soit ceux des plans, soit ceux des côtés, peuvent être supposés positifs, et l'on peut à son gré prendre la déviation d'un côté par rapport au prolongement du précédent plus grande ou plus petite que deux angles droits. Mais ce choix étant fait, la manière dont il faut mesurer les angles compris entre les plans n'est plus arbitraire, si l'on veut que les règles pour la résolution de ces polygones soient applicables à tous les cas possibles.

§ 67.

Afin d'établir une règle générale pour mesurer l'inclinaison des plans, il faut: 1° imaginer trois côtés consécutifs du polygone comme les segments ab, bc, cd dans la fig. 23; 2° mener de l'extrémité c du côté moyen bc une droite cf parallèle au côté précédent ab; 3° décrire un arc de cercle fg ayant c pour centre et s'étendant de la parallèle cf jusqu'au prolongement cg du côté moyen (cet arc mesure l'angle cbe, qui est la déviation du côté moyen par rapport au prolongement be du côté précédent); 4° décrire de même un autre arc de cercle gi ayant le même centre et le même rayon et s'étendant du prolongement cg du côté moyen jusqu'au côté suivant cd. L'angle sphérique igh, qui mesure la déviation du dernier arc gi par rapport au prolongement gh du premier arc fg, est égal à l'angle que forme le plan passant par le côté moyen et le côté suivant avec le plan passant par le côté moyen et le côté précédent, ou bien égal à la déviation du plan bcd par rapport au plan abc. Cet angle se mesure de la manière suivante: en se déplacant sur la sphère le long de l'arc fg du point f au point g, il faut, pour trouver la mesure de l'angle, tourner à gauche du prolongement de fg. C'est de cette manière qu'on peut déterminer ces angles, si dans un polygone on veut en connaître quelques-uns pour pouvoir calculer les autres.

§ 68.

Cependant, si l'on connaît à peu près les directions de tous les côtés d'un polygone, on peut en représenter les angles d'une manière plus claire en menant du centre $\mathfrak{c}$ de la sphère $wqhv$ (fig. 24) les rayons $\mathfrak{c}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{c}\mathfrak{D}$

parallèles respectivement aux côtés correspondants de la série $\text{I}^{\smile}$, $\text{III}^{\smile}$, $\text{V}^{\smile}$, $\text{VII}^{\smile}$ (fig. 22); car alors on obtient, en construisant les arcs de grand cercle $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CD}$ et $\mathfrak{DA}$, un polygone sphérique $\mathfrak{ABCD}$ dont les côtés mesurent les angles du polygone rectiligne, II, IV, VI, VIII, et dont les angles sont égaux aux angles I, III, V, VII que les plans font entre eux dans la figure rectiligne 22 *). Les angles du polygone rectiligne satisfont donc à la même équation que ceux d'un polygone sphérique, savoir (§ 37)

$$s \,,,\, \text{I}' \,,,\, \text{II}' \,,,\, \text{III}' \,,,\, \text{IV}' \,,,\, \ldots\ldots \,,,\, (2m)' = s.$$

Ici s peut désigner un segment tout à fait arbitraire, et $2m$ est le dernier angle du polygone rectiligne, ou bien la déviation du premier côté par rapport au prolongement du $m^{\text{ième}}$ (et dernier) côté.

§ 69.

Je suppose à présent que $\mathfrak{A}w\gamma hp$ représente l'horizon (fig. 24), $\mathfrak{A}\pi qv$ le cercle vertical, $\mathfrak{A}$ l'origine commune aux deux cercles. Les arcs horizontaux sont comptés positifs à gauche, et les arcs verticaux positifs en haut. Nous posons $\mathrm{c}\mathfrak{A} = +1$, $\mathrm{c}\gamma = \varepsilon$, $\mathrm{c}\pi = \eta$, les angles que font entre eux ces trois rayons étant droits, comme nous l'avons déjà supposé dans les §§ 24 et 25. Je suppose encore que le sommet du premier angle I du polygone $\mathfrak{ABCD}$ se trouve en $\mathfrak{A}$ à l'origine commune de l'horizon et du cercle vertical, et de plus que le prolongement du dernier côté VIII soit sur le cercle vertical $\mathfrak{A}v$ au-dessous de l'horizon. Cela posé, je dis que le rayon

$$\mathrm{c}\text{V} = \eta \,,,\, \text{IV}^{-\prime} \,,,\, \text{III}^{-\prime} \,,,\, \text{II}^{-\prime} \,,,\, \text{I}^{-\prime} \,,,\, (-\eta),$$

et en général, si le dernier côté $2m$ du polygone sphérique est vertical et se termine à l'origine $\mathfrak{A}$, tandis que son prolongement passe au-dessous de l'horizon, si, dans cette position de la sphère, on mène le rayon $\mathrm{c}(n+\text{I})$ au sommet de l'angle $(n+\text{I})$, c'est-à-dire à l'extrémité du côté n du polygone, je dis que ce rayon est

$$\mathrm{c}(n+\text{I}) = \eta \,,,\, n^{-\prime} \,,,\, (n-\text{I})^{-\prime} \,,,\, (n-\text{II})^{-\prime} \,,,\, \ldots\ldots \,,,\, \text{II}^{-\prime} \,,,\, \text{I}^{-\prime} \,,,\, (-\eta).$$

*) D'après la fig. 24 et la règle du § 67, les angles III et VII sont plus grands que 180° et les angles I et V plus petits que 180°. V tombe au-dessous du plan de projection; c'est ce qui fait que le côté VI a l'apparence d'être à droite d'un observateur qui sur la sphère se déplacerait le long de l'arc IV de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{C}$, tandis qu'en en réalité il est à sa gauche.

Pour démontrer cette proposition, je regarde le cercle horizontal et le cercle vertical comme immobiles, ainsi qu'on l'a fait au § 37. Alors, la sphère étant dans la position indiquée ci-dessus (fig. 24), nous la faisons tourner de 90° dans le sens vertical, puis de I degrés dans le sens horizontal, puis de II degrés dans le sens vertical, puis de III degrés dans le sens horizontal, etc., enfin de n degrés dans le sens vertical. De cette manière le sommet de l'angle $(n+\mathrm{I})$ se déplace d'un nombre de degrés égal à celui dont la sphère a tourné, et, d'après le § 33, le rayon $c(n+\mathrm{I})$ se change d'abord en $c(n+\mathrm{I}) \,,, \eta$, puis en $c(n+\mathrm{I}) \,,, \eta \,,, \mathrm{I}'$, puis en $c(n+\mathrm{I}) \,,, \eta \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}'$, puis en $c(n+\mathrm{I}) \,,, \eta \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}' \,,, \mathrm{III}'$, et ainsi de suite; enfin il se sera changé en $c(n+\mathrm{I}) \,,, \eta \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}' \,,, \mathrm{III}' \,,, \ldots \,,, (n-\mathrm{I})' \,,, n'$, et sera devenu égal à η, parce que l'extrémité du côté n et en même temps l'extrémité du rayon $c(n+\mathrm{I})$ ont fini par coïncider avec le pôle π de l'horizon. De l'équation

$$c(n+\mathrm{I}) \,,, \eta \,,, \mathrm{I}' \,,, \mathrm{II}' \,,, \mathrm{III}' \,,, \ldots \,,, (n-\mathrm{I})' \,,, n' = \eta$$

on conclut, en vertu du § 33,

$$c(n+\mathrm{I}) = \eta \,,, n^{\neg\prime} \,,, (n-\mathrm{I})^{\neg\prime} \,,, \ldots \,,, \mathrm{II}^{\neg\prime} \,,, \mathrm{I}^{\neg\prime} \,,, (-\eta).$$

C. Q. F. D.

§ 70.

Dans la fig. 24 on a, d'après la formule précédente,

$$\begin{aligned} c\,\mathrm{I} &= +\mathrm{I}, \\ c\,\mathrm{III} &= \eta \,,, \mathrm{II}^{\neg\prime} \,,, \mathrm{I}^{\neg\prime} \,,, (-\eta), \\ c\,\mathrm{V} &= \eta \,,, \mathrm{IV}^{\neg\prime} \,,, \mathrm{III}^{\neg\prime} \,,, \mathrm{II}^{\neg\prime} \,,, \mathrm{I}^{\neg\prime} \,,, (-\eta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En outre, d'après la condition indiquée dans le § 68, $c\,\mathrm{I}$ est parallèle à $\mathrm{I}^{\smile}$, $c\,\mathrm{III}$ à $\mathrm{III}^{\smile}$, $c\,\mathrm{V}$ à $\mathrm{V}^{\smile}$, etc. (fig. 22). Par conséquent (§ 65)

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^{\smile} &= c\,\mathrm{I} \cdot \overline{|\mathrm{I}^{\smile}}, \\ \mathrm{III}^{\smile} &= c\,\mathrm{III} \cdot \overline{|\mathrm{III}^{\smile}}, \\ \mathrm{V}^{\smile} &= c\,\mathrm{V} \cdot \overline{|\mathrm{V}^{\smile}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (2m-\mathrm{I})^{\smile} &= c(2m-\mathrm{I}) \cdot \overline{|(2m-\mathrm{I})^{\smile}}, \end{aligned}$$

$(2m-\mathrm{I})^{\smile}$ étant le $m^{\text{ième}}$ et dernier côté du polygone rectiligne.

De plus, puisque (§ 2)

$$\mathrm{I}^{\smile} + \mathrm{III}^{\smile} + \mathrm{V}^{\smile} + \ldots + (2m-\mathrm{I})^{\smile} = 0\,,$$

on aura aussi

$$|\overline{\mathrm{I}^{\smile}} + |\overline{\mathrm{III}^{\smile}}\cdot c\,\mathrm{III} + |\overline{\mathrm{V}^{\smile}}\cdot c\,\mathrm{V} + \ldots + |\overline{(2m-\mathrm{I})^{\smile}}\,.\,c(2m-\mathrm{I}) = 0.$$

En substituant dans cette équation aux rayons $c\,\mathrm{III}$, $c\mathrm{V}$, $c\mathrm{VII}$, ..., $c(2m-\mathrm{I})$ leurs valeurs trouvées au § 69, et en déplaçant ensuite l'extrémité de chaque rayon de 90° dans le sens vertical, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} &|\overline{\mathrm{I}^{\smile}}\cdot\eta + |\overline{\mathrm{III}^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} + |\overline{\mathrm{V}^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ \mathrm{IV}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{III}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} \\ &+ |\overline{\mathrm{VII}^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ \mathrm{VI}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{V}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{IV}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{III}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} + \ldots \\ &+ |\overline{(2m-\mathrm{I})^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ (2m-\mathrm{II})^{-\prime}\ {,,}\ (2m-\mathrm{III})^{-\prime}\ {,,}\ \ldots\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} = 0. \end{aligned}$$

Dans cette équation on peut encore, si l'on veut, faire disparaître $\mathrm{I}^{-\prime}$ de la manière exposée au § 33.

§ 71.

On a donc, pour tout polygone rectiligne dont les côtés ne sont pas dans un même plan, les équations suivantes:

$$A)\quad s\ {,,}\ \mathrm{I}'\ {,,}\ \mathrm{II}'\ {,,}\ \mathrm{III}'\ {,,}\ \mathrm{IV}'\ {,,}\ \mathrm{V}'\ {,,}\ \ldots\ {,,}\ (2m)' = s, \qquad (\S\ 68)$$

$$\begin{aligned} B)\quad &|\overline{\mathrm{I}^{\smile}}\cdot\eta + |\overline{\mathrm{III}^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} + |\overline{\mathrm{V}^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ \mathrm{IV}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{III}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} \\ &+ |\overline{\mathrm{VII}^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ \mathrm{VI}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{V}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{IV}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{III}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} + \ldots \\ &+ |\overline{(2m-\mathrm{I})^{\smile}}\cdot\eta\ {,,}\ (2m-\mathrm{II})^{-\prime}\ {,,}\ (2m-\mathrm{III})^{-\prime}\ {,,}\ \ldots\ {,,}\ \mathrm{III}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{II}^{-\prime}\ {,,}\ \mathrm{I}^{-\prime} = 0 \qquad (\S\ 70). \end{aligned}$$

Afin de rendre ces équations intelligibles indépendamment des recherches précédentes, je veux résumer la signification des symboles.

Les côtés sont comptés de telle sorte que le précédent se termine au point où le suivant commence.

Le premier, le second, le troisième, ..., le $m^{\text{ième}}$ ou dernier côté, sont désignés respectivement par $\mathrm{I}^{\smile}$, $\mathrm{III}^{\smile}$, $\mathrm{V}^{\smile}$, $\mathrm{VII}^{\smile}$, ..., $(2m-\mathrm{I})^{\smile}$ (fig. 22).

Les longueurs des côtés sont représentées par $|\overline{\mathrm{I}^{\smile}}$, $|\overline{\mathrm{III}^{\smile}}$, $|\overline{\mathrm{V}^{\smile}}$, $|\overline{\mathrm{VII}^{\smile}}$, ..., $|\overline{(2m-\mathrm{I})^{\smile}}$.

La déviation de chaque côté par rapport au prolongement du côté précédent est désignée par un nombre pair $\mathrm{II}, \mathrm{IV}, \mathrm{VI}, \ldots, 2m$, plus grand d'une unité que le nombre impair qui sert à désigner le côté précédent.

L'angle que forme le plan passant par un côté et le côté suivant avec le plan passant par le même côté et le côté précédent est désigné par celui des nombres impairs I, III, V, ..., ($2m$ — I) qui correspond à la désignation du côté moyen.

Tous les angles sont comptés positivement. Les règles données dans les §§ 66 et 67 enseignent s'il faut les prendre plus grands ou plus petits que 180°.

Les angles II, IV, VI, ..., $2m$ sont mesurés sur le cercle vertical ou sur un cercle perpendiculaire à l'horizon; c'est au contraire l'horizon qui sert à mesurer les angles I, III, V, VII, ..., ($2m$ — I) (§ 25). Les deux cercles se coupent suivant le rayon $+1$.

Sin 90°, ou bien $\sqrt{-1}$ (§ 6), est désigné dans le cercle vertical par η, et dans le cercle horizontal par ε; on a $\varepsilon^2 = -1$ et aussi $\eta^2 = -1$ (§ 5).

En supposant $n =$ II, IV, ..., $2m$, on désigne $\cos n + \eta \sin n$ par n' et $\dfrac{1}{\cos n + \eta \sin n}$ par $n^{-\prime}$ (§ 7).

En supposant $n =$ I, III, V, ..., $2m$ — I, on désigne $\cos n + \varepsilon \sin n$ par n' et $\dfrac{1}{\cos n + \varepsilon \sin n}$ par $n^{-\prime}$ (§ 7).

Cos n et sin n ont dans les premier et troisième quadrants la même direction, et dans les deuxième et quatrième quadrants des directions inverses (§ 6).

Le signe ,, n'a qu'imparfaitement la signification d'un signe de multiplication, car l'opération représentée par ce signe laisse inaltéré celui des segments figurant dans le multiplicande qui est au dehors du plan correspondant à la rotation indiquée par le multiplicateur. Considérons par exemple les trois segments 2, 3ε et 4η; alors

$$(2+3\varepsilon+4\eta) \,,,\, \text{II}' \text{ signifie } 3\varepsilon + (2+4\eta)\cdot(\cos \text{II} + \eta \sin \text{II}).$$

De même

$$(2+3\varepsilon+4\eta) \,,,\, \text{I}' \text{ signifie } 4\eta + (2+3\varepsilon)\cdot(\cos \text{I} + \varepsilon \sin \text{I}).$$

Il faut encore observer que l'opération se fait dans l'ordre où les facteurs se suivent de gauche à droite. Par exemple, si l'on veut trouver la valeur de $(2+3\varepsilon+4\eta)$,, I' ,, II', il faut commencer par trouver celle de $(2+3\varepsilon+4\eta)$,, I', qui est

$$4\eta + 2\cos\text{I} + 2\varepsilon\sin\text{I} - 3\sin\text{I} + 3\varepsilon\cos\text{I},$$

puis il faut trouver la valeur de

$$\left\{4\eta + 2\cos\text{I} + 2\varepsilon\sin\text{I} - 3\sin\text{I} + 3\varepsilon\cos\text{I}\right\} ,, \text{II}'.$$

La lettre s désigne un segment de droite de longueur et de direction arbitraires. Ainsi dans l'équation (A) on peut substituer à s un terme quelconque de l'équation (B) et changer par là l'expression de ce terme. Si par exemple $s = \overline{|\text{III}^{\smile}}.\eta ,, \text{II}^{-\prime},, \text{I}^{-\prime}$, qui est le second terme de (B), on transformera l'équation (A) en

$$\overline{|\text{III}^{\smile}}\cdot\eta ,, \text{IV}' ,, \text{V}' ,, \text{VI}' ,, \ldots ,, (2m)' = \overline{|\text{III}^{0}}\cdot\eta ,, \text{II}^{-\prime} ,, \text{I}^{-\prime} \qquad (\S\ 32).$$

Je n'ai pas approfondi davantage l'étude de ces polygones.

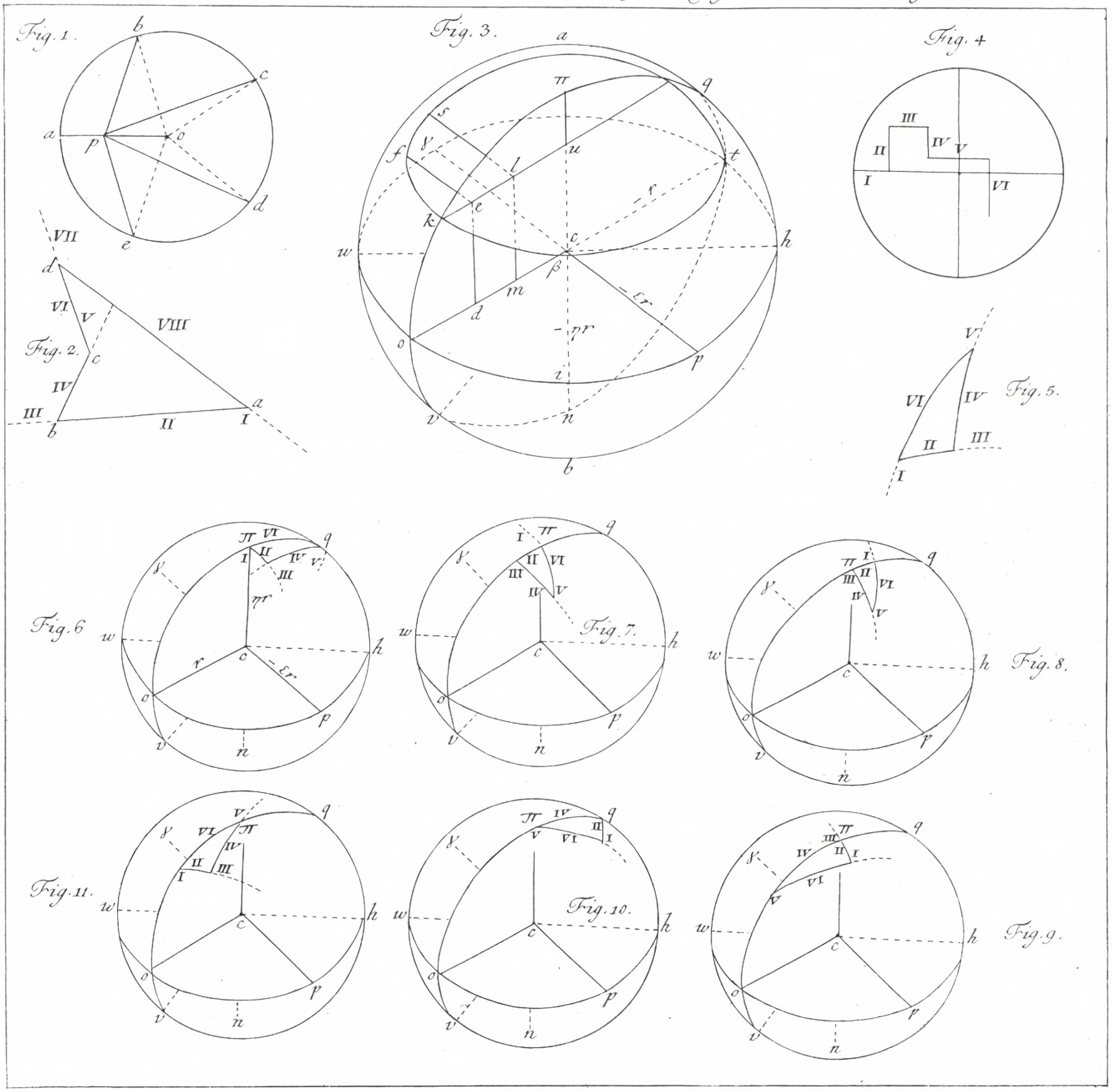


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

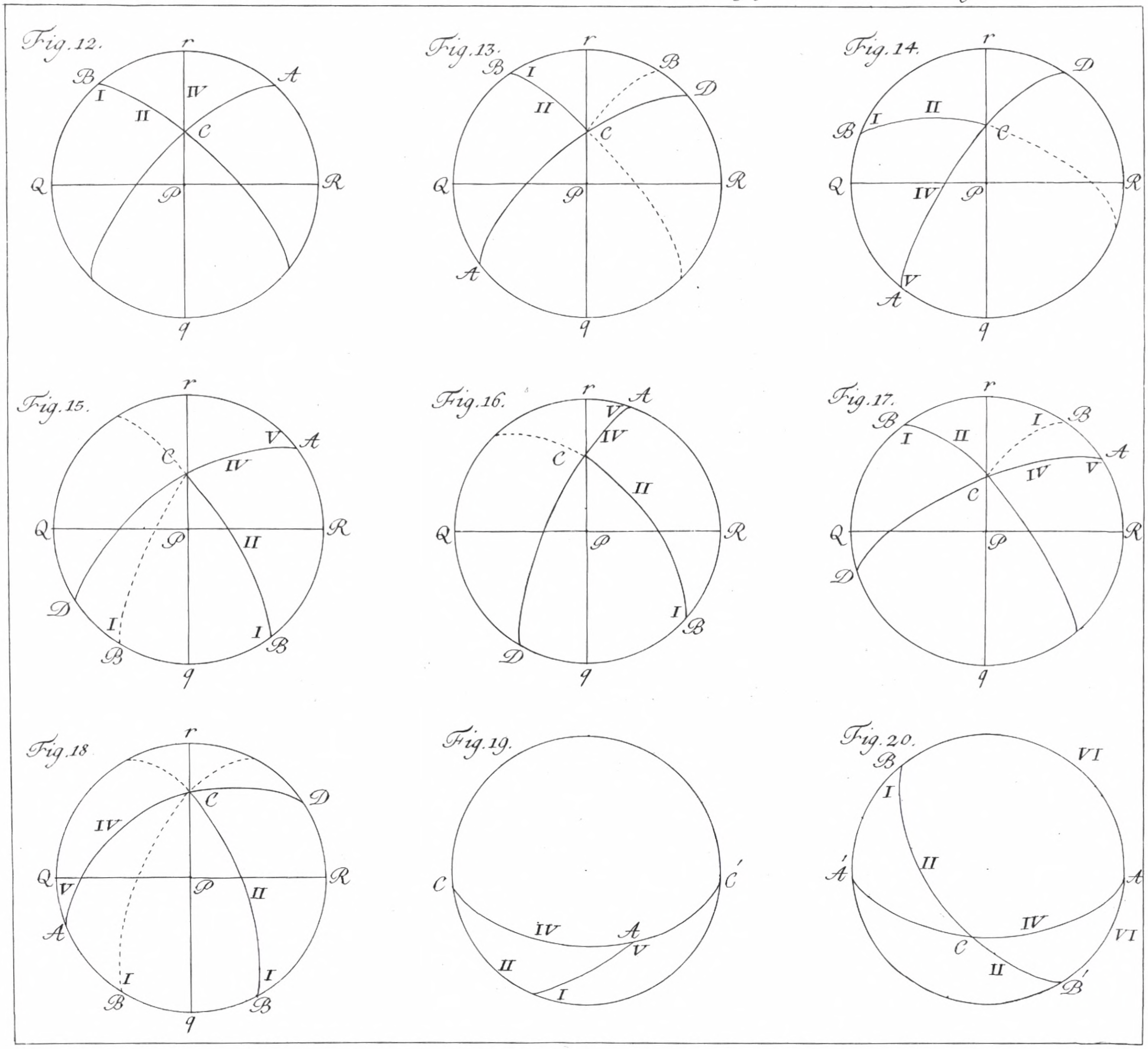


Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20.

Fig. 21.

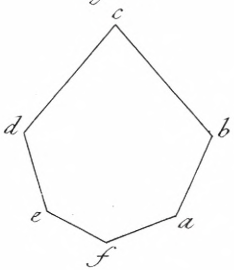
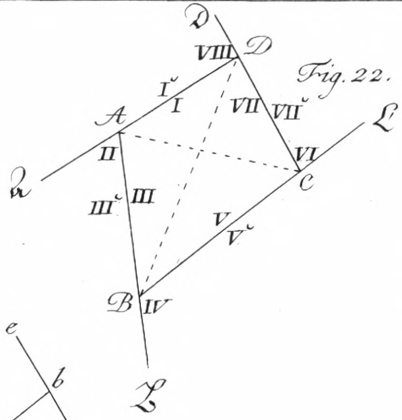


Fig. 22.



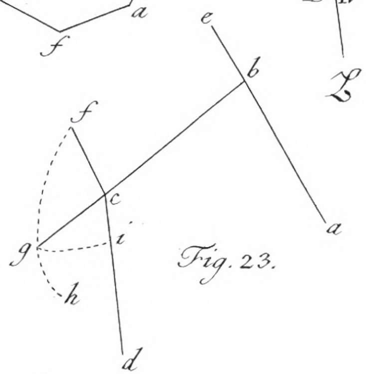
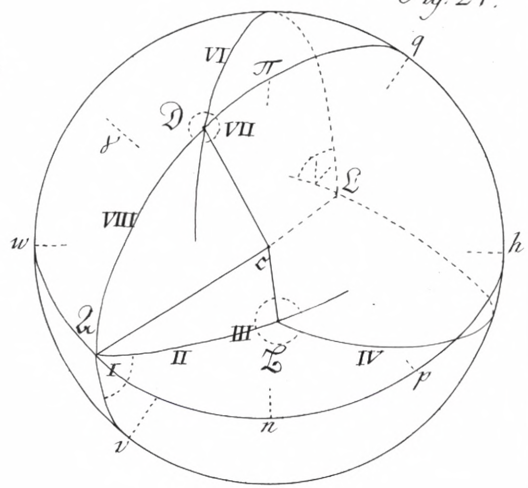


Fig. 23.

Fig. 24.



1797—1897.